미분적분학1	Worksheet #9	학번	
		성명	

[연습문제 5.4]

9. 일반적인 부정적분을 구하여라.

$$\int v(v^2+2)^2 dv$$

(풀이)

$$\int v(v^2+2)^2 dv = \int v(v^4+4v^2+4)dv$$
$$= \int (v^5+4v^3+4v)dv$$
$$= \frac{1}{6}v^6+4\times\frac{1}{4}v^4+4\times\frac{1}{2}v^2+C$$
$$= \frac{1}{6}v^6+v^4+2v^2+C$$

14. 일반적인 부정적분을 구하여라.

$$\int \left(\frac{1+r}{r}\right)^2 dr$$

(풀이)

$$\int \left(\frac{1+r}{r}\right)^2 dr = \int \frac{(1+r)^2}{r^2}dr = \int \frac{1+2r+r^2}{r^2}dr$$
$$= \int \left(\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{r^2}+\frac{r^2}{r^2}\right)dr = \int \left(r^{-2}+\frac{2}{r}+1\right)dr$$
$$= \frac{1}{-2+1}r^{-2+1}+2\ln|r|+r+C$$
$$= -\frac{1}{r}+2\ln|r|+r+C$$

31. 다음 적분을 구하여라.

$$\int_0^1 x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})dx$$

(풀이)

$$\int_0^1 x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})dx = \int_0^1 x\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{4}}\right)dx = \left[\frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}+\frac{1}{\frac{5}{4}+1}x^{\frac{5}{4}+1}\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}\right]_0^1 = \frac{3}{7}+\frac{4}{9} = \frac{55}{63}$$

38. 다음 적분을 구하여라.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta+\sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$

(풀이)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta+\sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta(1+\tan^2\theta)}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta$$
$$= [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)-(-\cos 0) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

46. 다음 적분을 구하여라.

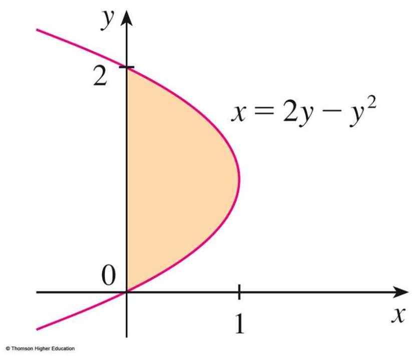
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|dx$$

(풀이)

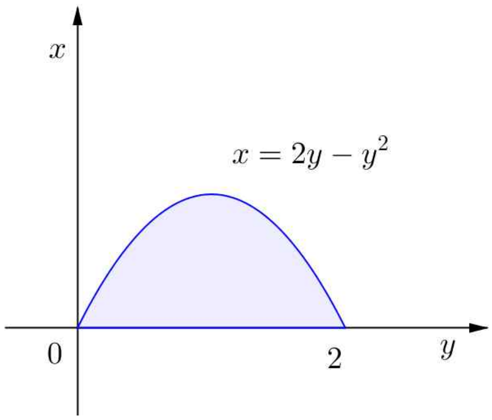
$0<x<\pi$일 때, $\sin x>0$이고, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$일 때, $\sin x<0$ 이므로

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} |\sin x|dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|dx$$
$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin x)dx$$
$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$
$$= -\cos\pi-(-\cos 0)+\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\pi = 3$$

49. y축의 오른쪽, 그리고 포물선 $x=2y-y^2$의 왼쪽에 놓여 있는 영역(그림에서 음영 부분)의 넓이는 적분 $\int_0^2 (2y-y^2)dy$로 주어진다. (머리를 시계방향으로 돌리고, 그 영역을 $y=0$에서 $y=2$까지 곡선 $x=2y-y^2$아래에 놓여 있는 것처럼 생각하여라.) 그 영역의 넓이를 구하여라.



(풀이)

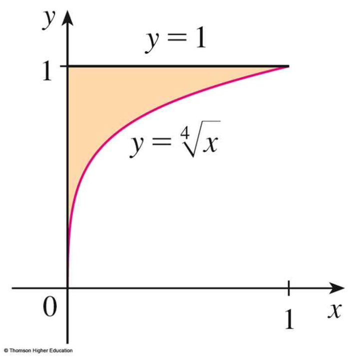


그림이 위와 같다고 생각하면 되므로 구하는 영역의 넓이 A는

$$A = \int_0^2 (2y - y^2)dy = \left[y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

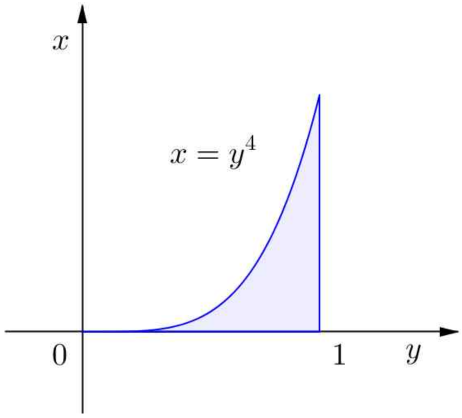
이다.

50. 아래 그림에서 음영 부분의 경계는 y축, $y=1$, $y = \sqrt[4]{x}$일 때, 이 넓이를 x를 y의 식으로 나타내어 y축으로 적분하여라(연습문제 49와 같은 방법으로).



(풀이)

$y = \sqrt[4]{x}$에서 $x = y^4$이므로 그림이 아래와 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이 A는

$$A = \int_0^1 y^4 dy = \left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

이다.

53. 만일 기름통에서 기름이 시각 t에서 분당 $r(t)$리터의 비율로 새어나온다면 $\int_0^{120} r(t)dt$는 무엇을 의미하는가?

(풀이) 120분 동안 새어나온 기름의 양을 의미한다.

[연습문제 5.5]

4. 주어진 치환을 이용하여 적분을 구하여라.

$$\int \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta, \; u = \sin\theta$$

(풀이)

$u = \sin\theta$로 치환하자. 그러면 $du = \cos\theta \, d\theta$이므로

$$\int \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$$

7-48. 부정적분을 구하여라.

20. $\int \frac{z^2}{z^3+1} dz$

(풀이)

$u = z^3 + 1$로 치환하자. 그러면 $du = 3z^2 dz$이고 $z^2 dz = \frac{1}{3}du$이므로

$$\int \frac{z^2}{z^3+1} dz = \int \frac{1}{z^3+1} \times z^2 dz = \int \frac{1}{u} \times \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|z^3+1| + C$$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

(풀이)

$u=\ln x$로 치환하자. 그러면 $du=\frac{1}{x}dx$이므로

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int (\ln x)^2\times\frac{1}{x}dx=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$$

25. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

(풀이)

$u=\sqrt{1+e^x}$로 치환하자. 그러면 $u^2=1+e^x$이고 $2udu=e^xdx$이므로

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx=\int \sqrt{1+e^x}\times e^xdx=\int u\times 2udu$$
$$=\int 2u^2du=\frac{2}{3}u^3+C$$
$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+e^x}\right)^3+C$$

30. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}dx$

(풀이)

$u=\tan x$로 치환하자. 그러면 $du=\sec^2 x\,dx$이므로

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}dx=\int \frac{1}{\tan^2 x}\times\sec^2 x\,dx$$
$$=\int \frac{1}{u^2}du=\int u^{-2}du$$
$$=\frac{1}{-2+1}u^{-2+1}+C=-\frac{1}{u}+C$$
$$=-\frac{1}{\tan x}+C=-\cot x+C$$

44. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$

(풀이)

$u=x^2$로 치환하자. 그러면 $du=2xdx$이고 $xdx=\frac{1}{2}du$이므로

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx=\int \frac{1}{1+(x^2)^2}\times xdx=\int \frac{1}{1+u^2}\times\frac{1}{2}du$$
$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+C$$

60. 정적분을 계산하여라.

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

(풀이)

$u=-x^2$로 치환하자. 그러면 $du=-2xdx$이므로 $xdx=-\frac{1}{2}du$이다. 또한 $x=0$일 때, $u=0$이고 $x=1$일 때, $u=-1$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}\times xdx=\int_0^{-1} e^u\times\left(-\frac{1}{2}\right)du$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^u\right]_0^{-1}=-\frac{1}{2}(e^{-1}-e^0)=\frac{1-e^{-1}}{2}=\frac{e-1}{2e}$$

63. 정적분을 계산하여라.

$$\int_0^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$$

(풀이)

$u=1+2x$로 치환하자. 그러면 $du=2dx$이므로 $dx=\frac{1}{2}du$이다. 또한 $x=0$일 때, $u=1$이고 $x=13$일 때, $u=27$이므로

$$\int_0^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}=\int_1^{27}\frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}\times\frac{1}{2}du$$
$$=\int_1^{27}\frac{1}{2}u^{-\frac{2}{3}}du=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}u^{-\frac{2}{3}+1}\right]_1^{27}$$
$$=\left[\frac{3}{2}u^{\frac{1}{3}}\right]_1^{27}=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{u}\right]_1^{27}$$
$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{1}\right)=3$$

87. f가 연속이고 $\int_0^4 f(x)dx=10$일 때, $\int_0^2 f(2x)dx$를 구하여라.

(풀이)

$u=2x$로 치환하자. 그러면 $du=2dx$이므로 $dx=\frac{1}{2}du$이다. 또한 $x=0$일 때, $u=0$이고 $x=2$일 때, $u=4$이므로

$$\int_0^2 f(2x)dx=\int_0^4 f(u)\times\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int_0^4 f(u)du=5$$

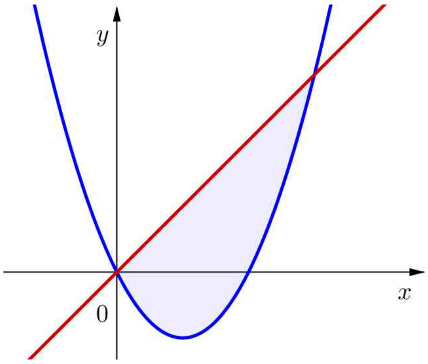
이다.

[연습문제 6.1]

5-12. 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역의 그림을 그려라. x 또는 y에 대해 어떤 변수로 적분할 것인지 결정하여라. 대표 근사 직사각형을 그리고 높이와 폭을 정하여라. 그리고 주어진 영역의 넓이를 구하여라.

8. $y = x^2 - 4x$, $y = 2x$

(풀이)



두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$$x^2 - 4x = 2x$$

$\Rightarrow$ $x^2 - 6x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0, 6$

이고, $0 \le x \le 6$일 때, $x^2 - 4x \le 2x$이므로 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^6 \{2x - (x^2 - 4x)\} dx$$

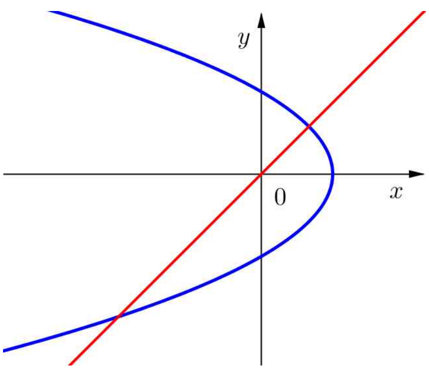
$$= \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^6 = 36$$

이다.

12. $4x + y^2 = 12$, $x = y$

(풀이)



$4x + y^2 = 12$를 x에 대해 풀면

$$x = -\frac{1}{4}y^2 + 3$$

이므로, 두 곡선의 교점의 y좌표를 구하면

$$-\frac{1}{4}y^2 + 3 = y$$

$\Rightarrow$ $y^2 + 4y - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $y = -6, 2$

이고, $-6 \le y \le 2$일 때, $y \le -\frac{1}{4}y^2 + 3$이므로 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{-6}^{2} \left\{\left(-\frac{1}{4}y^2 + 3\right) - y\right\} dy$$

$$= \int_{-6}^{2} \left(-\frac{1}{4}y^2 - y + 3\right) dy$$

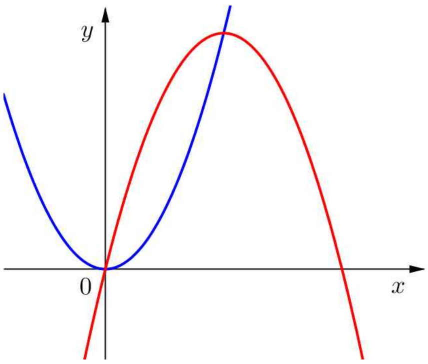
$$= \left[-\frac{1}{12}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 3y\right]_{-6}^{2} = \frac{64}{3}$$

이다.

13-28. 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역의 그림을 그리고 그 넓이를 구하여라.

14. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

(풀이)



두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$$x^2 = 4x - x^2$$

$\Rightarrow$ $2x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0, 2$

이고, $0 \le x \le 2$일 때, $x^2 \le 4x - x^2$이므로 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^2 \{(4x - x^2) - x^2\} dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$$

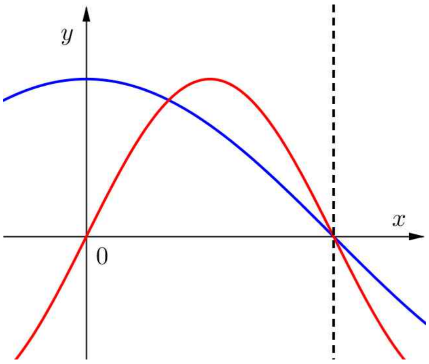
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

이다.

24. $y=\cos x$, $y=\sin 2x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$

(풀이)

주어진 영역의 그림을 그리면 아래 그림과 같다.



두 곡선 $y=\cos x$와 $y=\sin 2x$의 교점의 x좌표를 구하면

$$\cos x=\sin 2x$$

$\Rightarrow\quad \cos x-2\sin x\cos x=0$

$\Rightarrow\quad \cos x(1-2\sin x)=0$

$\Rightarrow\quad \cos x=0,\ \sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}$

이고, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$일 때 $\sin 2x\le\cos x$, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\cos x\le\sin 2x$이므로 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin 2x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx$$

$$=\left[\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

이다.