미분적분학1	Worksheet #12	학번	
		성명	

[연습문제 7.4]

7-38. 다음 적분을 계산하여라.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}dx$

(풀이)

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같으므로 나눗셈을 먼저 하면 아래와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x-6 & \quad x \\ & \quad x-6 \\ \hline & \qquad 6 \end{array}$$

따라서,

$$\int \frac{x}{x-6}dx = \int\left(1+\frac{6}{x-6}\right)dx$$
$$= x+6\ln|x-6|+C$$

18. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+6x+2}{x^2+3x+2}dx$

(풀이)

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같으므로 나눗셈을 먼저 하면 아래와 같다.

$$\begin{array}{r|r} & 3 \\ \hline x^2+3x+2 & 3x^2+6x+2 \\ & 3x^2+9x+6 \\ \hline & -3x-4 \end{array}$$

따라서,

$$\frac{2x^2+6x+2}{x^2+3x+2} = 3+\frac{-3x-4}{x^2+3x+2}$$

이고 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$이므로 $\dfrac{-3x-4}{x^2+3x+2}$를 부분분수 분해하면

$$\frac{-3x-4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

에서 양변에 $(x+1)(x+2)$를 곱하면

$$-3x-4 = A(x+2)+B(x+1)$$
$$\Rightarrow \quad -3x-4=(A+B)x+2A+B$$

가 되어 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases} A+B=-3 \\ 2A+B=-4 \end{cases}$$

이다. 이를 만족하는 A, B를 구하면 $A=-1$, $B=-2$이므로

$$\frac{-3x-4}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1}+\frac{-2}{x+2}$$

이다. 따라서 구하는 정적분은

$$\int_1^2 \frac{3x^2+6x+2}{x^2+3x+2}dx = \int_1^2\left(3+\frac{-3x-4}{x^2+3x+2}\right)dx$$
$$= \int_1^2\left(3-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$= \left[3x-\ln|x+1|-2\ln|x+2|\right]_1^2$$
$$= (6-\ln 3-2\ln 4)-(3-\ln 2-2\ln 3)$$
$$= 3-3\ln 2+\ln 3$$

20. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2}dx$

(풀이)

$\dfrac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2}$을 부분분수 분해하면

$$\frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2} = \frac{A}{3x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

에서 양변에 $(3x-1)(x-1)^2$을 곱하면

$$x(3-5x)$$
$$= A(x-1)^2+B(3x-1)(x-1)+C(3x-1)$$
$$\Rightarrow \quad 3x-5x^2$$
$$= (A+3B)x^2+(-2A-4B+3C)x+A+B-C$$

가 되어 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases} A+3B=-5 \\ -2A-4B+3C=3 \\ A+B-C=0 \end{cases}$$

이다. 이를 만족하는 A, B, C를 구하면 $A=1$, $B=-2$, $C=-1$이므로

$$\frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2} = \frac{1}{3x-1}+\frac{-2}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}$$

이다. 따라서 구하는 정적분은

$$\int_2^3 \frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2}dx$$

$$=\int_2^3\left(\frac{1}{3x-1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\int_2^3\left(\frac{1}{3x-1}-\frac{2}{x-1}-(x-1)^{-2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|3x-1|-2\ln|x-1|-\frac{1}{-1}(x-1)^{-1}\right]_2^3$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|3x-1|-2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}\right]_2^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln 8-2\ln 2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\ln 5-2\ln 1+1\right)$$

$$=-\ln 2-\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{2}$$

25. $\displaystyle\int\frac{4x}{x^3+x^2+x+1}dx$

(풀이)

$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$이므로 $\dfrac{4x}{x^3+x^2+x+1}$을 부분분수 분해하면

$$\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

에서 양변에 $(x+1)(x^2+1)$을 곱하면

$$4x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$\Rightarrow\quad 4x=(A+B)x^2+(B+C)x+A+C$$

가 되어 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases}A+B=0\\B+C=4\\A+C=0\end{cases}$$

이다. 이를 만족하는 A, B, C를 구하면 $A=-2$, $B=2$, $C=2$ 이므로

$$\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{-2}{x+1}+\frac{2x+2}{x^2+1}$$

이다. 따라서 구하는 적분은

$$\int\frac{4x}{x^3+x^2+x+1}dx$$

$$=\int\left(-\frac{2}{x+1}+\frac{2x+2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int\left(-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-2\ln|x+1|+\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x+C$$

28. $\displaystyle\int\frac{x^3+6x-2}{x^4+6x^2}dx$

(풀이)

$x^4+6x^2=x^2(x^2+6)$이므로 $\dfrac{x^3+6x-2}{x^4+6x^2}$을 부분분수 분해하면

$$\frac{x^3+6x-2}{x^2(x^2+6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+6}$$

에서 양변에 $x^2(x^2+6)$을 곱하면

$$x^3+6x-2=Ax(x^2+6)+B(x^2+6)+(Cx+D)x^2$$

$$\Rightarrow\quad x^3+6x-2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+6Ax+6B$$

가 되어 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases}A+C=1\\B+D=0\\6A=6\\6B=-2\end{cases}$$

이다. 이를 만족하는 A, B, C, D를 구하면 $A=1$, $B=-\dfrac{1}{3}$, $C=0$, $D=\dfrac{1}{3}$이므로

$$\frac{x^3+6x-2}{x^2(x^2+6)}=\frac{1}{x}+\frac{-\frac{1}{3}}{x^2}+\frac{\frac{1}{3}}{x^2+6}$$

이다. 따라서 구하는 적분은

$$\int\frac{x^3+6x-2}{x^4+6x^2}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^{-2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{x^2+6}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{3}\times\frac{1}{-1}x^{-1}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{6}}+C$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{6}}+C$$

46. 아래 피적분함수를 적절히 치환하여 유리함수로 만들고, 적분을 계산하여라.

$$\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx$$

(풀이)

$u=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ 라 하자. 그러면

$$u^2=1+\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow\quad u^2-1=\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow\quad (u^2-1)^2=x$$

이므로 $2(u^2-1)\times 2u\,du=dx$이다. 따라서

$$\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx=\int\frac{u}{(u^2-1)^2}\times 4u(u^2-1)du$$

$$=\int\frac{4u^2}{u^2-1}du$$

$$=\int\left(4+\frac{4}{u^2-1}\right)du$$

$$=\int\left(4+\frac{2}{u-1}-\frac{2}{u+1}\right)du$$
$$=4u+2\ln|u-1|-2\ln|u+1|+C$$
$$=4u+2\ln\left|\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right|-2\ln\left|\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right|+C$$

[연습문제 7.8]

5-40. 다음 적분들이 수렴하는지 또는 발산하는지를 조사하여라. 그리고 수렴하는 경우에는 그 값을 구하여라.

14. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

(풀이)

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$$
$$=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-\frac{1}{x}}\times\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\lim_{b\to\infty}\int_{-1}^{-\frac{1}{b}} e^u du \ (u=-\frac{1}{x}\text{로 치환})$$
$$=\lim_{b\to\infty}[e^u]_{-1}^{-\frac{1}{b}}=\lim_{b\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{b}}-e^{-1}\right)=1-e^{-1}$$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}dx$

(풀이)

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{9+x^6}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x^2}{9+x^6}dx$$
$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{9+x^6}\times x^2dx$$
$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b^3} \frac{1}{9+u^2}\times\frac{1}{3}dx \qquad (u=x^3\text{으로 치환})$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}\right]_0^{b^3}$$
$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{b^3}{3}=\frac{\pi}{18}$$

이고,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{9+x^6}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x^2}{9+x^6}dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{9+x^6}\times x^2dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a^3}^0 \frac{1}{9+u^2}\times\frac{1}{3}dx \qquad (u=x^3\text{으로 치환})$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}\right]_{a^3}^0$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{a^3}{3}\right)=\frac{\pi}{18}$$

이므로,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}dx$$
$$=\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{9+x^6}dx+\int_0^\infty \frac{x^2}{9+x^6}dx=\frac{\pi}{9}$$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(풀이)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\lim_{b\to1^-}\int_0^{\sin^{-1}b} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\times\cos\theta d\theta$$
$$=\lim_{b\to1^-}\int_0^{\sin^{-1}b} \frac{1}{\cos\theta}\times\cos\theta d\theta$$
$$=\lim_{b\to1^-}[\theta]_0^{\sin^{-1}b}=\lim_{b\to1^-}\sin^{-1}b=\frac{\pi}{2}$$

36. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$

(풀이)

$\dfrac{1}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$ 이므로 $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 는 $x=2$에서 불연속이다. 또한

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-x-2}=\int_0^2 \frac{1}{(x-2)(x+1)}dx$$
$$=\lim_{b\to2^-}\int_0^b\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2}-\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx$$
$$=\lim_{b\to2^-}\left[\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|\right]_0^b$$
$$=\lim_{b\to2^-}\left\{\left(\frac{1}{3}\ln|b-2|-\frac{1}{3}\ln|b+1|\right)-\frac{1}{3}\ln2\right\}$$
$$=-\infty$$

이므로, $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$ 는 발산한다.

57. 다음 적분이 수렴하는 p의 값을 찾고, 그 경우의 적분값을 구하여라.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$$

(풀이)

1) $p=1$일 때

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+}[\ln|x|]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}(-\ln a) = +\infty$$

로 발산.

2) $p\neq 1$일 때

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-p}dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\frac{1-a^{-p+1}}{1-p}$$

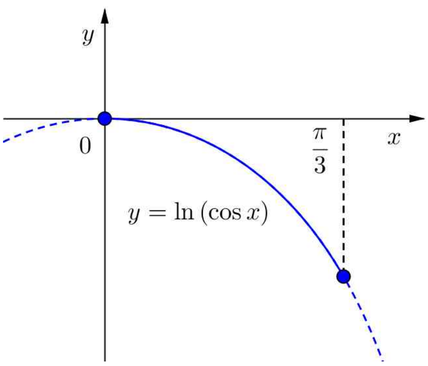
이므로 $p>1$일 때, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$는 발산하고 $p<1$일 때, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}$로 수렴한다.

[연습문제 8.1]

14. 곡선의 길이를 구하여라.

$$y=\ln(\cos x),\ 0\le x\le \frac{\pi}{3}$$

(풀이)



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

이므로, 곡선의 길이 L은

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+(-\tan x)^2}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sec^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx$$

$$= [\ln|\sec x+\tan x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

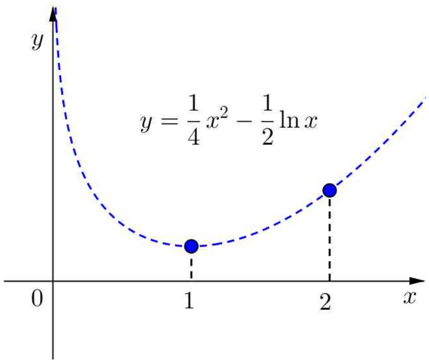
$$= \ln\left(\sec\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}\right) - \ln(\sec 0+\tan 0)$$

$$= \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 = \ln(2+\sqrt{3})$$

17. 곡선의 길이를 구하여라.

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x,\ 1\le x\le 2$$

(풀이)



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

이므로, 곡선의 길이 L은

$$L = \int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$= \int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$= \int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}dx$$

$$= \int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$= \int_1^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^2$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 1\right) = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

37. 시작점이 $(0,1)$일 때 곡선 $y=\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$에 대한 호의 길이 함수를 찾아라.

(풀이)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

이므로 호의 길이 함수 $s(x)$는

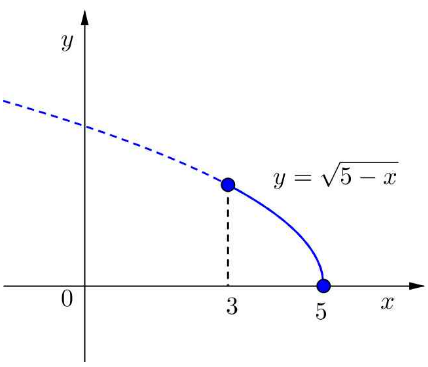
$$s(x)=\int_0^x \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^x \sqrt{1+\frac{(1-t)^2}{1-t^2}}\,dt$$
$$=\int_0^x \sqrt{\frac{1-t^2+1-2t+t^2}{1-t^2}}\,dt$$
$$=\int_0^x \sqrt{\frac{2(1-t)}{1-t^2}}\,dt$$
$$=\int_0^x \sqrt{\frac{2}{1+t}}\,dt$$
$$=\int_0^x \sqrt{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\left[\sqrt{2}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1+t)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^x$$
$$=\left[2\sqrt{2}\sqrt{1+t}\,\right]_0^x$$
$$=2\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}-1\right)$$

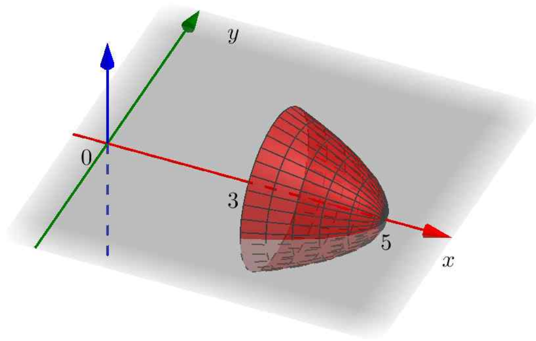
[연습문제 8.2]

7-14. x축에 대하여 곡선을 회전하여 얻은 곡면의 넓이를 구하여라.

8. $y=\sqrt{5-x}$, $3\le x\le 5$

(풀이)



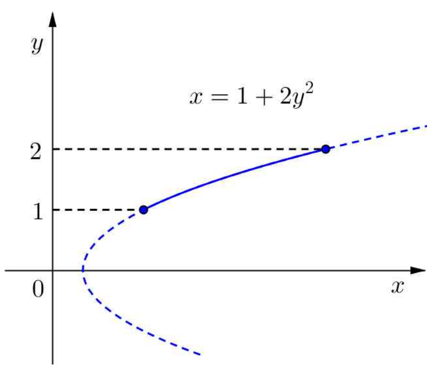


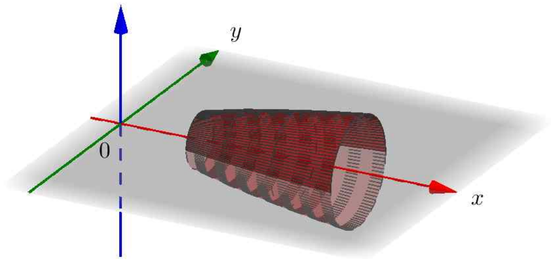
$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$이고, x축에 대하여 곡선을 회전하였으므로 곡면의 넓이 S는

$$S=\int_3^5 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_3^5 2\pi\sqrt{5-x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_3^5 2\pi\sqrt{5-x}\sqrt{1+\frac{1}{4(5-x)}}\,dx$$
$$=\int_3^5 2\pi\sqrt{5-x+\frac{1}{4}}\,dx$$
$$=\int_3^5 2\pi\left(\frac{21}{4}-x\right)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=2\pi\left[-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(\frac{21}{4}-x\right)^{\frac{1}{2}+1}\right]_3^5$$
$$=2\pi\left[-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{21}{4}-x}\right)^3\right]_3^5$$
$$=-\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{9}{4}\sqrt{\frac{9}{4}}\right)=\frac{13\pi}{3}$$

14. $x=1+2y^2$, $1\le y\le 2$

(풀이)





(풀이)

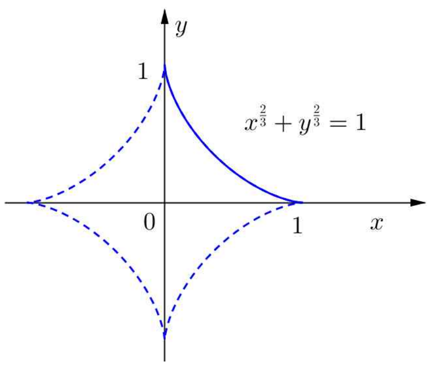
$\dfrac{dx}{dy} = 4y$이고, x축에 대하여 곡선을 회전하였으므로 곡면의 넓이 S는

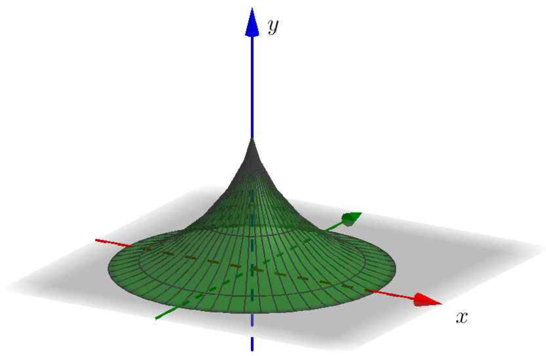
$$S = \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$
$$= \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+(4y)^2}\, dy$$
$$= \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+16y^2}\, dy = \int_1^2 \pi \sqrt{1+16y^2} \times 2y dy$$
$$= \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{65}} \pi u \times \frac{1}{8} u du \qquad (u = \sqrt{1+16y^2}\text{으로 치환})$$
$$= \left[\frac{\pi}{24} u^3\right]_{\sqrt{17}}^{\sqrt{65}}$$
$$= \frac{\pi}{24}(65\sqrt{65} - 17\sqrt{17})$$

15-18. 주어진 곡선을 y축에 대하여 회전한 결과로 얻어지는 곡면의 넓이를 구하여라.

16. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,\ 0 \le y \le 1$

(풀이)





$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$에서

$$y^{\frac{2}{3}} = 1 - x^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow \quad y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$
$$= -x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이다. 따라서 y축에 대하여 회전한 곡면의 넓이 S는

$$S = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 2\pi x \sqrt{1+\left(-x^{-\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 2\pi x \sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)}\, dx$$
$$= \int_0^1 2\pi x \sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}-1}\, dx$$
$$= \int_0^1 2\pi x^{\frac{2}{3}}\, dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{\frac{5}{3}} x^{\frac{5}{3}}\right]_0^1 = \frac{6\pi}{5}$$

17. $x = \sqrt{a^2 - y^2},\ 0 \le y \le \dfrac{a}{2}$

(풀이)

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-2y}{2\sqrt{a^2-y^2}} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$이므로, 곡선을 y축에 대하여

회전한 곡면의 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{a}{2}}2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}2\pi\sqrt{a^2-y^2}\sqrt{1+\left(-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}2\pi\sqrt{a^2-y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}2\pi\sqrt{a^2-y^2+y^2}\,dy=\int_0^{\frac{a}{2}}2\pi a\,dy=\pi a^2$$