

| 교과목  | 미적분학1 |  | 대학 | 대학 (자연 캠퍼스) |    |  |  | 점수 |  | 검인 |  |
|------|-------|--|----|-------------|----|--|--|----|--|----|--|
|      |       |  | 학과 | 학과/학부       |    |  |  |    |  |    |  |
| 담당교수 | 공동 출제 |  | 학년 |             | 학번 |  |  |    |  |    |  |
|      |       |  | 성명 |             |    |  |  |    |  |    |  |

2024학년도 1학기 미적분학1 중간고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.  
※ 반드시 검정 연필 또는 사프펜슬로 작성할 것.

1. 극한  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$  을 구하여라.

<풀이>

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos x} \text{-----2점}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\cos x + 1}{\cos^2 x} \text{-----2점}$$

$$= -2 \text{-----1점}$$

- ※ 다른 풀이도 각 단계별로 1점씩 부여  
※ 중간에 부호 잘못 계산하여 극한값이 2점이 나온 경우 1점 감점  
※  $\lim_{x \rightarrow 0}$  없이 계속 등식으로 끌고 갈 경우 1점 감점

2.  $\frac{1}{e} \leq x \leq e$  에서 함수  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

<풀이>

$\frac{1}{e} \leq x \leq e$  에서 함수  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  는 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

폐구간법에 의해

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1 \text{-----1점}$$

$$f(e) = \frac{1}{e} + 1 \text{-----1점}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} \text{-----1점}$$

이므로  $x=1$ 은 임계수 이고,  $f(1) = 1 \text{-----1점}$  이다.

따라서 최댓값은  $f\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1 \text{-----0.5점}$  이고,

최솟값은  $f(1) = 1 \text{-----0.5점}$ 이다.

3. 함수  $f$ 의 그래프가 점  $(0, 1)$ 을 지나고  $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가  $-\cos x + 3x + 3$ 일 때,  $f(\pi)$ 의 값을 구하여라.

<풀이>

$$f'(x) = -\cos x + 3x + 3 \text{이므로 } f(x) = -\sin x + \frac{3}{2}x^2 + 3x + C$$

이다. ....(3점: 각 1점)

$f$ 의 그래프가 점  $(0, 1)$ 을 지나므로  $f(0) = C = 1$ 이다. 따라서

$$f(x) = -\sin x + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1 \text{이고} \text{-----1점}$$

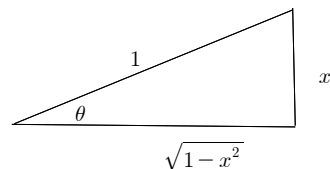
$$f(\pi) = \frac{3}{2}\pi^2 + 3\pi + 1 \text{이다.} \text{-----1점}$$

4. 다음 적분을 넓이로 해석하여 계산하여라.

$$\int_0^1 \cos(\sin^{-1} x) dx$$

<풀이>

$\theta = \sin^{-1} x$ 이면  $\sin \theta = x$ 이고 다음 그림으로부터



$$\cos(\sin^{-1} x) = \cos \theta = \sqrt{1-x^2} \text{이다.} \text{-----1점}$$

$$\int_0^1 \cos(\sin^{-1} x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{-----1점}$$

$$= \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4} \text{-----1점}$$

5. 곡선  $y = \ln(x^2 + 4) - x \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$  위의  $x = 2$ 인 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

<풀이>

$$x = 2 \text{ 일 때 } y = \ln 8 - \frac{\pi}{2} \text{ 이고} \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x}{x^2 + 4} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - x \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(2\text{점}) \\ &= \frac{2x}{x^2 + 4} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2x}{x^2 + 4} \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{이므로, } y'(2) = -\frac{\pi}{4} \text{ 이다.} \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

$$\text{따라서 접선의 방정식은 } y - (\ln 8 - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4}(x - 2) \text{ 이고 정리하}$$

$$\text{면 } y = -\frac{\pi}{4}x + \ln 8 \text{ 이다.} \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

6. 곡선  $y = \int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt$ 의 변곡점이 있으면, 이를 구하여라.

<풀이>

$$y = \int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt \text{에 대하여,}$$

미적분학의 제1기본정리에 의해

$$y' = (1+x^2)e^{x^2}, \quad \dots\dots\dots(2\text{점})$$

$$y'' = (2x + 2x + 2x^3)e^{x^2} = 2x(x^2 + 1)e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

$x < 0$ 일 때  $y'' < 0$ (아래로 오목)이고  $x > 0$ 일 때  $y'' > 0$ (위로 오목)이므로, 변곡점은  $(0,0)$ 이다. \dots\dots\dots(2\text{점})

7. 함수  $f(x) = x^{2x+1}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 로그미분법을 이용하여 도함수  $f'(x)$ 를 구하여라.

(2)  $a = 1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 선형화를 구하고, 이것을 이용하여  $1.1^{3.2}$ 의 근삿값을 구하여라.

<풀이>

(1)  $y = x^{2x+1}$ 에서 양변에 로그를 취하면

$$\ln y = \ln x^{2x+1} = (2x+1)\ln x \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

양변을 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x+1}{x} + 2\ln x \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

$$\Rightarrow f'(x) = y' = \left(2 + \frac{1}{x} + 2\ln x\right)x^{2x+1} \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

(2)  $a = 1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 선형화  $L(x)$ 를 구하면

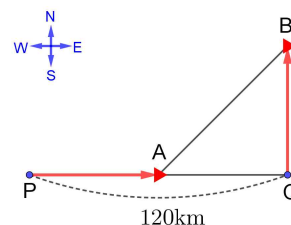
$$\begin{aligned} L(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ &= 1 + 3(x-1) = 3x - 2 \quad \dots\dots\dots(1\text{점}) \end{aligned}$$

그러므로

$$1.1^{3.2} = f(1.1) \approx L(1.1) = 3.3 - 2 = 1.3 \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

※ 계산 실수 -0.5점

8. 아래 그림과 같이 P에서 동쪽으로 120km 떨어진 지점에 Q가 위치한다.



정오에 배 A는 P지점에서 시속 15km로 동쪽으로 향하고 배 B는 Q지점에서 시속 20km로 북쪽으로 향해 달린다. 오후 4시에 두 배 사이의 거리는 얼마나 빨리 변하겠는가?

<풀이>

배 A의 위치를  $(x,0)$ , 배 B의 위치를  $(120,y)$ 라 하자. 그러면 두 배 사이의 거리  $z$ 는

$$z^2 = (120-x)^2 + y^2 \quad \dots\dots\dots(2\text{점})$$

를 만족하므로 양변을 미분하면

$$2z \frac{dz}{dt} = -2(120-x) \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{-(120-x) \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{z} \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

$$\text{이다. } \frac{dx}{dt} = 15, \quad \frac{dy}{dt} = 20 \text{ 이고 오후 4시에 } x = 60, \quad y = 80,$$

$$z = 100 \text{ 이므로} \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

오후 4시에 두 배 사이의 거리의 변화율은

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=4} = \frac{-(120-60) \times 15 + 80 \times 20}{100} = 7 \quad \dots\dots\dots(1\text{점})$$

시속 7km이다. ※ 계산 실수 -0.5점