

교과목	미적분학2	대학	대학(용인 캠퍼스)			점수		검인	
		학과	학과(학부)						
담당교수	김재덕	학년		학번					
		성명							

2024학년도 1학기 중간고사

- ※ 계산과정은 상세히 서술해서 답안을 작성해 주세요.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성해 주세요.

1. 다음 급수가 수렴하는지 판정하여라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+1}}{n^3+n+1}$$

(풀이)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \text{이 } p\text{-급수 판정법에 의해 발산하고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^5+1}}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+n}}{n^3+n+1} = 1$$

이므로 극한비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+1}}{n^3+n+1}$ 는 발산한다.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$$

(풀이)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{n}{e^{n^2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n e^{2n+1}} = 0 < 1$$

이므로 비판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ 는 수렴한다.

2. 다음 급수가 절대수렴, 조건부수렴 또는 발산하는지 판정하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$$

(풀이)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{이 } p\text{-급수 판정법에 의해 발산하고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1$$

이므로 극한비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1} \right|$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ 는 발산한다.

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1} \text{ 는 교대급수}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \text{ 에 대해}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2 \times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}$$

이므로 $x \geq 2$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이 되어 $\left\{ \frac{n^2}{n^3+1} \right\}$ 은 감소수열

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

그러므로 교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ 는 수렴한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ 는 조건부 수렴한다.

$$3. \text{ 멱급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \times n} (x-2)^n \text{의 수렴구간을 구하여라.}$$

(풀이)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^{n+1} \times (n+1)} (x-2)^{n+1}}{\frac{1}{3^n \times n} (x-2)^n} \right| = \frac{1}{3} |x-2|$$

이므로 비판정법에 의해 $\frac{1}{3} |x-2| < 1$ 일 때, 즉, $-1 < x < 5$ 일

때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \times n} (x-2)^n$ 는 수렴한다.

① $x = -1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \times n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} : \text{교대급수판정법에 의해 수렴}$$

② $x = 5$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \times n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : p\text{-급수 판정법에 의해 발산}$$

그러므로 수렴구간은 $[-1, 5)$

※ 문제 4번과 5번은 다음 표를 이용하여 답안을 작성하세요.

맥클로린 급수	수렴 반지름
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$R = 1$
$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$R = 1$

4. 함수

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

의 멱급수 표현과 수렴반지름을 구하여라.

(풀이)

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad R=2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x-2)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad R=2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+2}}{2^{n+1}}, \quad R=2$$

5. 부정적분

$$\int \tan^{-1}(x^2) dx$$

를 멱급수로 나타내어라.

(풀이)

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

이므로

$$\tan^{-1}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1}$$

이고

$$\int \tan^{-1}(x^2) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)(4n+3)}$$

6. 벡터 $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ 위로의 벡터 $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$ 의 스칼라 사영 $\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ 와 벡터 사영 $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ 를 구하여라.

(풀이)

$$\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2+21-20}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \frac{3}{26} \langle 1, 3, 4 \rangle = \left\langle \frac{3}{26}, \frac{9}{26}, \frac{12}{26} \right\rangle$$

7. 공간 상의 세 점

$$P(1, 2, 3), Q(1, 3, 5), R(2, 1, -1)$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

(풀이) 법선벡터 $\mathbf{n}$ 이

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle 0, 1, 2 \rangle \times \langle 1, -1, -4 \rangle \\ &= \langle -2, 2, -1 \rangle \end{aligned}$$

이므로 평면의 방정식은

$$\begin{aligned} -2(x-1) + 2(y-2) - (z-3) &= 0 \\ 2x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

(2) 삼각형 PQR의 넓이를 구하여라.

(풀이)

삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{2}$$

8. 두 평면

$$3x - 2y + z = 1, \quad 2x + y - 3z = 3$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 평면의 교선의 대칭방정식을 구하여라.

(풀이)

$$3x - 2y + z = 1 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad 2x + y - 3z = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

라 하면 $\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 에서

$$7x - 5z = 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{7}z + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{1}$ 에서

$$3\left(\frac{5}{7}z + 1\right) - 2y + z = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{11}{7}z + 1$$

그러므로

$$\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 11t + 1 \\ z = 7t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{11} = \frac{z}{7}$$

(2) 두 평면이 이루는 각을 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하여라.

$$\left(\text{단, } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

(풀이)

두 평면의 법선벡터를 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 라 하자. 그러면

$$\mathbf{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle, \quad \mathbf{n}_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$$

이므로

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|6 - 2 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{14}$$