

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과/학부							
담당교수	공동출제		학년		학번						
			성명								

2023 학년도 1학기 기말고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 적분 $\int (2x+1)^3 dx$ 을 구하여라. (5점)

<풀이>

$t = 2x+1$ 로 치환하면, $dt = 2dx$ 이므로

$$\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{8} t^4 + C$$

$$= \frac{1}{8} (2x+1)^4 + C$$

2. 적분 $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ 을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (u = \sqrt{x}, x = u^2, dx = 2u du)$$

$$= 2 \int e^{-u} du = -2e^{-\sqrt{x}} + C$$

3. 적분 $\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx$ 을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \quad (2점)$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + C \quad (3점)$$

4. 두 포물선 $y = x^2, x = y^2$ 으로 둘러싸인 영역을 직선 $x=1$ 을 회전축으로 하여 얻은 입체의 부피를 V_1 , 직선 $y=1$ 을 회전축으로 하여 얻은 입체의 부피를 V_2 라 할 때, $\frac{V_1}{V_2}$ 을 구하여라. (단, V_1 은 원통셀 방법을 이용하시오.) (5점)

<풀이>

$$V_1 = \int_0^1 2\pi(1-x)(\sqrt{x}-x^2) dx \quad (1점)$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{11}{30}\pi \quad (1점)$$

$$V_2 = \int_0^1 \pi \{ (1-x^2)^2 - (1-\sqrt{x})^2 \} dx \quad (1점)$$

$$= \pi \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{11}{30}\pi \quad (1점)$$

$$\text{따라서 } \frac{V_1}{V_2} = 1 \quad (1점)$$

5. 적분 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx$ 을 구하여라. (5점)

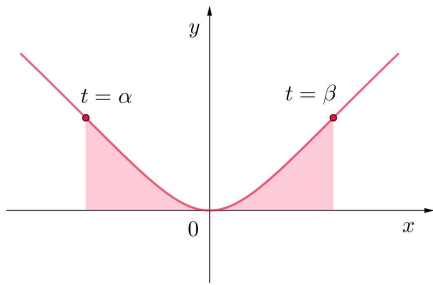
<풀이>

$x=3\sec\theta$ 로 치환하면,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx = \int \frac{1}{9\sec^2\theta\sqrt{9\sec^2\theta-9}} 3\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9\sec\theta} d\theta = \frac{1}{9}\cos\theta + C = \frac{1}{9} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$$

6. 매개변수방정식 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t \\ y = t^2 \end{cases}$ 로 나타내어진 곡선이 아래 그림과 같다.



이 곡선이 위로 오목(아래로 볼록)한 구간이 $\alpha < t < \beta$ 일 때 색칠한 부분의 넓이를 구하여라. (5점)

<풀이>

도함수와 이계도함수를 구하면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(t^2+1)-2t \times 2t}{(t^2+1)^2}}{t^2+1} = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^3}$$

이므로

$-1 < x < 1$ 에서 $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ 이므로 $\alpha = -1, \beta = 1$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^1 t^2 \times (t^2+1) dt = 2 \int_0^1 (t^4+t^2) dt = 2 \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{16}{15}$$

7. 이상 적분 $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$ 이 수렴하는지 또는 발산하는지 조사하여라. 수렴하는 경우에는 그 값을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (u = \ln x, x = e^u, dx = e^u du)$$

$$= \int u e^{-u} du = -u e^{-u} + \int e^{-u} du = -u e^{-u} - e^{-u} + C$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \quad \text{이므로}$$

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_e^t \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_e^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e} \quad \text{로 수렴한다.}$$

8. 곡선 $x=2(\theta-\sin\theta), y=2(1-\cos\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 를 x 축에 대하여 회전시킬 때 생기는 곡면의 넓이를 구하여라. (5점)

<풀이>

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{(2(1-\cos\theta))^2 + (2\sin\theta)^2} d\theta$$

$$= \sqrt{8(1-\cos\theta)} d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2} d\theta \quad \text{이므로}$$

$$S_x = 2\pi \int y ds = 2\pi \int_0^{2\pi} 2(1-\cos\theta) 4\sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} 4\sin^2\frac{\theta}{2} 4\sin\frac{\theta}{2} d\theta = 32\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 32\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$u = \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{로 치환하면} \quad du = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} d\theta \quad \text{이므로,}$$

$$S_x = -64\pi \int_1^{-1} (1-u^2) du = \frac{256}{3}\pi$$