

|      |        |    |       |    |  |    |  |    |  |
|------|--------|----|-------|----|--|----|--|----|--|
| 교과목명 | 기초미적분학 | 소속 | 학부(과) |    |  | 점수 |  | 검인 |  |
| 담당교수 | 공동출제   | 학년 |       | 학번 |  |    |  |    |  |
|      |        | 성명 |       |    |  |    |  |    |  |

2024학년도 1학기 기말고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.  
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 닫힌 구간  $[0, 4]$ 에서 함수  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.(4점)

(풀이)

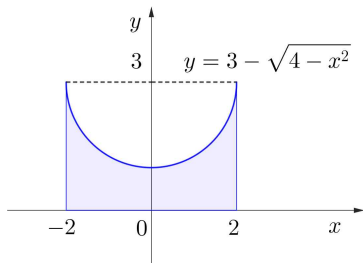
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$$

이므로 구간  $[0, 4]$ 에서의 임계수는  $x = 2$ 이다.

$$f(2) = -20, \quad f(0) = 0, \quad f(4) = 32$$

이므로 최댓값은 32, 최솟값은 -20

2. 함수  $y = 3 - \sqrt{4 - x^2}$ 의 그래프가 아래와 같다.



다음 정적분을 넓이로 해석하여 계산하여라.(4점)

$$\int_{-2}^2 (3 - \sqrt{4 - x^2}) dx$$

(풀이)

직사각형의 넓이에서 반원의 넓이를 빼면 되므로

$$\int_{-2}^2 (3 - \sqrt{4 - x^2}) dx = 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 12 - 2\pi$$

3.  $x \geq 0$ 인 실수  $x$ 에 대해 함수  $f(x)$ 가

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t+5}{\sqrt{5+t^2}} dt$$

로 정의된다.  $x = 2$ 에서의 접선의 기울기  $f'(2)$ 를 구하여라.(4점)

(풀이)

미적분학의 기본정리1에 의해

$$f'(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{5+x^2}}$$

이므로

$$f'(2) = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

4. 다음 적분을 구하여라.(4점)

$$\int_1^2 \frac{4x^4 - 2x^2 + 2x\sqrt{x}}{x} dx$$

(풀이)

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{4x^4 - 2x^2 + 2x\sqrt{x}}{x} dx &= \int_1^2 (4x^3 - 2x + 2x^{\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \left[ x^4 - x^2 + \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 = \left( 2^4 - 2^2 + \frac{4}{3} 2^{\frac{3}{2}} \right) - \left( 1 - 1 + \frac{4}{3} \right) \\
 &= \frac{32}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

5. 다음 방정식의 해를 구하여라.(4점)

$$e^{x^2-3} = \frac{1}{e^{2x}}$$

(풀이)

$$e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = -3, 1$$

6. 다음 부등식의 해를 구하여라.(4점)

$$\log_{\frac{1}{3}}(8-2x) \leq 2\log_{\frac{1}{3}} x$$

(풀이)

$$\log_{\frac{1}{3}}(8-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}} x^2$$

$$\Rightarrow 8-2x \geq x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

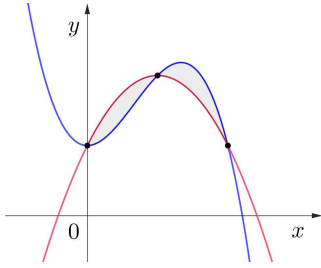
$$\Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

이고 진수의 조건에 의해  $0 < x < 4$ 이므로 부등식의 해는

$$0 < x \leq 2$$

7. 두 곡선  $y = -x^3 + 2x^2 + 1$ ,  $y = -x^2 + 2x + 1$ 로 둘러싸인 영역 (아래 그림의 색칠된 영역)의 넓이를 구하여라.(4점)



(풀이)

교점의  $x$ 좌표를 구하면

$$-x^3 + 2x^2 + 1 = -x^2 + 2x + 1$$

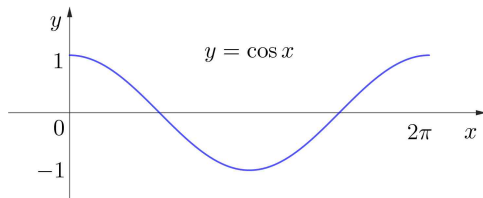
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow x(x-2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1, 2$$

이므로 영역의 넓이  $A$ 는

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \{(-x^2 + 2x + 1) - (-x^3 + 2x^2 + 1)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{(-x^3 + 2x^2 + 1) - (-x^2 + 2x + 1)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8. 닫힌 구간  $[0, 2\pi]$ 에서 삼각함수  $y = \cos x$ 의 그래프가 아래와 같다.



부등식

$$2\cos x + \sqrt{3} \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

를 만족하는  $x$ 의 범위를 구하여라.(4점)

(풀이)

$$\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이고

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

이므로 부등식의 해는

$$\frac{5}{6}\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi$$

9. 다음 삼각함수의 값을 구하여라.(4점)

$$\tan \frac{5}{4}\pi + \csc \frac{5}{6}\pi + \sec \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

(풀이)

$$\tan \frac{5}{4}\pi = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \frac{5}{6}\pi = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc \frac{5}{6}\pi = 2$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

이다. 그러므로

$$\tan \frac{5}{4}\pi + \csc \frac{5}{6}\pi + \sec \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2 + 2 = 5$$

10. 실수  $\alpha$ ,  $\beta$ 에 대해  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ 이고  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,

$$\tan \beta = \frac{3}{4} \text{ 일 때,}$$

$$\sin 2\alpha + \cos(\alpha + \beta)$$

의 값을 구하여라.(4점)

(풀이)

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ 이고 } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ 이므로}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi \text{ 이고 } \tan \beta = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin \beta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{4}{5}$$

이다. 따라서

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

그러므로

$$\sin 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = -\frac{24}{25} + \frac{24}{25} = 0$$