

교과목명	미적분학2	소속	학부(과)			점수		검인	
담당교수	김 재 덕	학년		학번					
		성명							

2024학년도 1학기 기말고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 곡선

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3, 2t-1 \rangle, \quad 0 \leq t \leq 3$$

위의 점에서 평면 $x-z=1$ 과 평행한 접선의 대칭방정식을 구하여라. (5점)

(풀이)

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 3t^2, 2 \rangle \text{이고 평면의 법선벡터 } \mathbf{n} \text{이}$$

$$\mathbf{n} = \langle 1, 0, -1 \rangle$$

이므로

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = \langle 2t, 3t^2, 2 \rangle \cdot \langle 1, 0, -1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1$$

이다. 따라서 접점의 좌표는 $(1, 1, 1)$ 이고 접선의 방향벡터는

$$\mathbf{r}'(1) = \langle 2, 3, 2 \rangle$$

이고 직선의 대칭방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

2. 곡선 $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, e^t \rangle$ 에 대하여 $0 \leq t \leq \pi$ 의 곡선의 길이를 구하여라. (5점)

(풀이)

곡선의 길이 L 은

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(-e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t + e^t \sin t)^2 + (e^t)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{3} e^t dt$$

$$= [\sqrt{3} e^t]_0^\pi = \sqrt{3}(e^\pi - 1)$$

3. $z = x + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ 위의 점 $(3, 0, 3)$ 에서 접평면의 방정식을 구하여라. (5점)

(풀이)

$$f(x, y) = x + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \text{라 할 때}$$

$$f_x(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_y(x, y) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

이므로 접평면의 방정식은

$$z = 3 + f_x(3, 0)(x-3) + f_y(3, 0)(y-0)$$

$$\Rightarrow z = 3 + x - 3 + \frac{1}{3}y$$

$$\Rightarrow 3x + y - 3z = 0$$

4. 함수 $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ 의 극댓값, 극솟값, 안장점을 구하여라. (5점)

(풀이)

임계점을 구하면

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad f_y(x, y) = -6x + 24y^2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-6x + 24 \times \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = 0 \Rightarrow 6x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

임계점은 $(0, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = -6, \quad f_{yy}(x, y) = 48y$$

1) $(0, 0)$

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - \{f_{xy}(0, 0)\}^2 = 0 \times 0 - (-6)^2 = -36 < 0$$

이므로 안장점

2) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$$D\left(1, \frac{1}{2}\right) = f_{xx}\left(1, \frac{1}{2}\right)f_{yy}\left(1, \frac{1}{2}\right) - \left\{f_{xy}\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

$$= 6 \times 24 - (-6)^2 = 108 > 0$$

이고 $f_{xx}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 6 > 0$ 이므로 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 은 극소점.

5. 삼변수 함수 $f(x,y,z)=x\cos yz$ 에 대해 다음 물음에 답하여라.
(1) P(7,3,0)에서 점 Q(1,5,3)방향으로 점 P에서의 f 의 변화율을 구하여라. (3점)

(풀이)

$\overrightarrow{PQ}=\langle -6,2,3 \rangle$ 이고 $\overrightarrow{PQ}$ 방향의 단위벡터가

$$\mathbf{u}=\frac{1}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ}=\left\langle -\frac{6}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right\rangle$$

이고

$$\nabla f(x,y,z)=\langle \cos yz,-xz\sin yz,-zy\sin yz \rangle$$

이므로 $\overrightarrow{PQ}$ 방향으로 점 P에서의 f 의 변화율은

$$\nabla f(7,3,0) \cdot \mathbf{u}=\langle 1,0,0 \rangle \cdot \left\langle -\frac{6}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right\rangle=-\frac{6}{7}$$

- (2) P(7,3,0)에서 f 의 변화율의 최댓값을 구하여라. (2점)

(풀이)

P(7,3,0)에서 f 의 변화율의 최댓값은

$$|\nabla f(7,3,0)|=|\langle 1,0,0 \rangle|=1$$

6. 영역 $D=\left\{(x,y,z)\left|x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right.\right\}$ 에서 함수

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2$$

의 최댓값과 최솟값을 구하여라. (5점)

(풀이)

- 1) D 의 내부의 임계점을 구하면

$$f_x(x,y,z)=4x=0, \quad f_y(x,y,z)=2y=0, \quad f_z(x,y,z)=-2z=0$$

$$\Rightarrow x=0, y=0, z=0$$

이고 $f(0,0,0)=0$ 이다.

- 2) D 의 경계에서의 최대/최소를 구하면

$$g(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \text{라 하자. 그러면 라그랑주승수법에 의해}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=2\lambda x & \cdots ① \\ 2y=\frac{1}{2}\lambda y & \cdots ② \\ -2z=\frac{2}{9}\lambda z & \cdots ③ \\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 & \cdots ④ \end{cases}$$

①에서 $x=0$ 또는 $\lambda=2$

②에서 $y=0$ 또는 $\lambda=4$

③에서 $z=0$ 또는 $\lambda=-9$

case1) $x=y=z=0 \rightarrow$ ④를 만족못한다.

case2) $x=y=0, \lambda=-9 \rightarrow$ ④에 대입 $\Rightarrow z=\pm 3$

$$f(0,0,\pm 3)=-9$$

case3) $x=z=0, \lambda=4 \rightarrow$ ④에 대입 $\Rightarrow y=\pm 2$

$$f(0,\pm 2,0)=4$$

case4) $y=z=0, \lambda=2 \rightarrow$ ④에 대입 $\Rightarrow x=\pm 1$

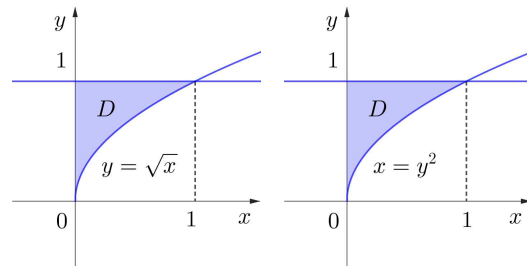
$$f(\pm 1,0,0)=2$$

그러므로 최댓값은 4, 최솟값은 -9

7. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy dx$ 을 계산하여라. (5점)

(풀이)

적분영역이 아래 그림과 같다.



적분순서를 바꾸어 반복적분을 계산하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3} dx dy \\ &= \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3} dy \\ &\quad (u=\sqrt{1+y^3} \text{으로 치환}) \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} u \times \frac{2}{3} u du \\ &= \left[\frac{2}{9} u^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{9} (2\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

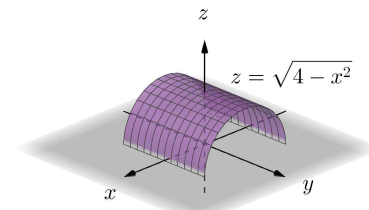
8. $R=\{(x,y) | -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ 일 때, 이중적분

$$\iint_R \sqrt{4-x^2} dA$$

의 값을 구하여라. (5점)

(풀이)

영역 R 에서 $z=\sqrt{4-x^2}$ 의 그래프가 아래 그림과 같다.



따라서 이중적분을 부피로 해석하여

$$\iint_R \sqrt{4-x^2} dA = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 = 8\pi$$