

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인		
			학과	학과/학부								
담당교수	조 규 근		학년		학번							
			성명									

2019 학년도 1학기 중간고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 사프펜슬로 작성할 것.

1. 극좌표의 점 $\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$ 을 직교좌표로 나타내어라. (5점)

<풀이> $x = 2\cos\frac{3}{4}\pi = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ 이고

$y = 2\sin\frac{3}{4}\pi = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ 이므로

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 이다.

2. 곡선 C 가 매개변수방정식 $x = t^3 + t$, $y = t^4 + 1$ 로 정의될 때, $t = -1$ 에서 접선의 방정식을 구하여라. (5점)

풀이: $t = -1$ 이면 $x = -2$ 이고 $y = 2$ 이다.

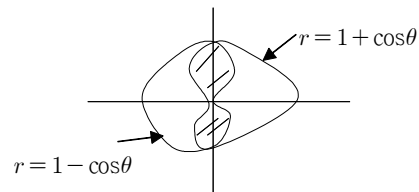
$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3}{3t^2 + 1}$ 이므로 $m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=-1} = -1$ 이다. 따라서

접선은

$y - 2 = -(x + 2)$ 또는 $y = -x$ 이다.

3. 두 극곡선 $r = 1 - \cos\theta$ 와 $r = 1 + \cos\theta$ 의 내부에 놓인 영역의 넓이를 구하여라. (5점)

풀이:



$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta = \frac{3}{2}\pi - 4$$

4. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n} (x-1)^n$ 의 수렴구간을 구하여라. (5점)

풀이: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{(2n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{(2n-1)3^n}{|x-1|^n} = \frac{|x-1|}{3} < 1$

절대수렴

즉, $|x-1| < 3$ 일 때 절대수렴이다.

(1) $x = -2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < \infty$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 은 발산($p=1$)이므로,

극한비교판정법에 의해, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 는 발산한다.

(2) $x = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$

① $\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n+1}$ 감소수열

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

교대급수판정법에 의해, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$ 는 수렴한다.

따라서 수렴구간은 $(-2, 4]$ 이다.

5. 세 점 $A(3,-1,2)$, $B(1,0,1)$, $C(1,2,3)$ 에 대하여 (1)번과 (2)번의 두 물음에 답하시오.

(1) 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\overrightarrow{AB} = \langle -2, 1, -1 \rangle, \overrightarrow{AC} = \langle -2, 3, 1 \rangle \text{이므로,}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 3 - 1 = 6 \text{이다.}$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라. (5점)

<풀이> 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하자.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \langle 4, 4, -4 \rangle \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3} \text{이다.}$$

6. 기하급수 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$)을 이용하여 (1)번과 (2)번의 두 물음에 답하시오.

(1) $\ln(1-x)$ 를 멍급수로 표현하여라. (단, $|x| < 1$) (5점)

<풀이> $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 의 양변을 x 에 대해 적분하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) + C \text{ 이고 } x=0 \text{을 대입하면, } C=0 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \text{이다.}$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ 의 값을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \ln \frac{3}{2}$$