

9.1

1. 매개방정식을 사용하여 점들을 구성하고 다음 곡선의 개형을 그려라. t 가 증가함에 따라 추적되는 곡선의 방향을 화살표로 나타내어라.

$$x = t^3 + t, \quad y = t^2 + 1, \quad -2 \leq t \leq 2$$

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

2. 매개방정식 $x = 2t + 3, \quad y = 3t + 2$ 에 대하여,

(a) 매개방정식을 써서 점들을 구성하여 개형을 그려라. t 가 증가함에 따라 추적되는 곡선의 방향을 화살표로 나타내어라.

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

(b) 직교좌표방정식을 구하기 위하여 매개변수를 소거하여라.

$$\text{답: } y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

3. 매개방정식 $x = t - 2, \quad y = t^2 + 3, \quad -3 \leq t \leq 3$ 에 대하여,

(a) 매개방정식을 써서 점들을 구성하여 개형을 그려라. t 가 증가함에 따라 추적되는 곡선의 방향을 화살표로 나타내어라.

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

(b) 직교좌표방정식을 구하기 위하여 매개변수를 소거하여라.

$$\text{답: } y = (x + 2)^2 + 3, \quad -5 \leq x \leq 1$$

4. 매개방정식 $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ 에 대하여,

(a) 매개방정식을 써서 점들을 구성하여 개형을 그려라. t 가 증가함에 따라 추적되는 곡선의 방향을 화살표로 나타내어라.

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

(b) 직교좌표방정식을 구하기 위하여 매개변수를 소거하여라.

$$\text{답: } x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

5. 매개방정식 $x = \sec \theta, \quad y = \tan^2 \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에 대하여,

(a) 곡선의 직교좌표방정식을 구하기 위하여 매개변수를 소거하여라.

$$\text{답: } y = x^2 - 1, \quad x \geq 1$$

(b) 곡선의 개형을 그리고 매개변수가 증가함에 따라 추적되는 곡선의 방향을 화살표로 나타내어라.

답: 학생들에게 맡깁니다.

9.2

1. 주어진 매개변수에 대응하는 점에서 곡선의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $x = \sqrt{t}$, $y = t^2 + 2t$; $t = 1$

답: $y = 8x - 5$

(2) $x = t^4 + 1$, $y = t^3 + t$; $t = 1$

답: $y = x$

2. $\frac{dy}{dx}$ 와 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 를 구하여라.

(1) $x = \frac{1}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$

답: $\frac{t^2+1}{(t+1)^2}$, $-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3$

(2) $x = \sin\theta$, $y = -3\cos\theta$

답: $3\tan\theta$, $3\sec^3\theta$

3. 타원 $x = \cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 적분을 이용하여 계산하여라.

답: 3π

4. 다음 곡선의 길이를 구하여라.

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

답: $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

5. 주어진 곡선을 x 축을 축으로 회전시킬 때 생기는 곡면의 넓이를 구하여라.

$$x = \sqrt{5} \cos^3\theta, \quad y = \sqrt{5} \sin^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

답: 6π

9.3

1. 다음 극좌표의 점들을 표시하여라. 그리고 이 점의 다른 극좌표를 $r > 0$ 인 경우와 $r < 0$ 인 경우에 하나씩 구하여라.

(1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$

(3) $\left(-3, \frac{5\pi}{4}\right)$

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

2. 다음 극좌표의 점들을 표시하여라. 또 이들의 직교좌표를 구하여라.

(1) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

(2) $\left(-1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(3) $\left(-4, -\frac{\pi}{3}\right)$

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

3. 직교좌표 $(-1, 1)$ 에 대하여

(1) 점을 $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 인 범위에서 극좌표 (r, θ) 로 표시하여라.

(2) 점을 $r < 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 인 범위에서 극좌표 (r, θ) 로 표시하여라.

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

4. 직교좌표 $(2, 2\sqrt{3})$ 에 대하여

(1) 점을 $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 인 범위에서 극좌표 (r, θ) 로 표시하여라.

(2) 점을 $r < 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 인 범위에서 극좌표 (r, θ) 로 표시하여라.

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

5. 극좌표가 주어진 조건을 만족하는 점들로 구성된 영역의 개형을 그려라.

(1) $1 \leq r < 2$, $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

(2) $r \geq 2$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

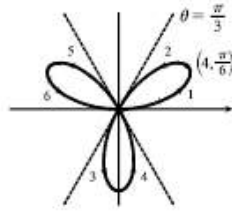
6. 직교좌표방정식 $x^2 + y^2 = 2x$ 으로 주어진 곡선과 일치하는 극좌표방정식을 구하여라.

답: $r = 2\cos\theta$

7. 직교좌표에 θ 의 함수로서 r 을 먼저 그림으로써 극방정식으로 주어진 곡선의 개형을 그려라.

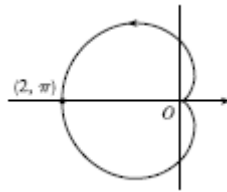
(1) $r = 4\sin 3\theta$

답:



(2) $r = 1 - \cos \theta$

답:



8. 주어진 극곡선에서 θ 값으로 지정된 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

$$r = \cos \frac{\theta}{3}, \quad \theta = -\pi$$

답: $\sqrt{3}$

9.4

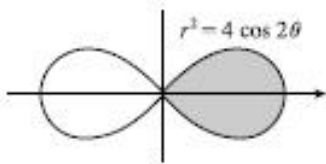
1. 주어진 곡선과 명시된 영역으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

$$r = \cos \theta + \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

답: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

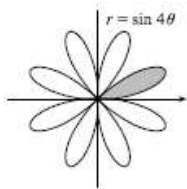
2. 색칠된 영역의 넓이를 구하여라.

(1) $r^2 = 4 \cos 2\theta$



답: 2

(2) $r = \sin 4\theta$



답: $\frac{\pi}{16}$

3. 곡선의 개형을 그리고 그것으로 둘러싸인 넓이를 구하여라.

$$r = \cos \theta$$

답: $\frac{\pi}{4}$, 개형은 학생들에게 맡깁니다.

4. $r = 3\sin\theta$ 의 외부와 $r = 2 + \sin\theta$ 의 내부에 놓인 영역의 넓이를 구하여라.

답: $\frac{9\pi}{4}$

5. 두 곡선 $r = \sqrt{3}\sin\theta$, $r = \cos\theta$ 의 내부에 놓인 영역의 넓이를 구하여라.

답: $\frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

6. 다음 극곡선의 정확한 길이를 구하여라.

(1) $r = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$

답: π

(2) $r = 1 + \cos\theta$

답: 8

7. 극방정식 $r = 1 + \cos\theta$ 으로 정의된 곡선과 직교방정식 $y = x$ 으로 정의된 직선의 모든 교점을 직교좌표로 나타내어라.

답: $(0,0), \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

10.2

1. $a_n = \frac{3n}{2n+1}$ 이라 하자.

(a) $\{a_n\}$ 이 수렴하는지 조사하여라.

답: 수렴

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하는지 조사하여라.

답: 발산

2. 기하급수의 수렴, 발산을 조사하여라. 수렴하면 합을 구하여라.

(1) $6 - 8 + \frac{32}{3} - \frac{128}{9} + \dots$

답: 발산

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^n}$$

$$\text{답: } \frac{9}{7}$$

3. 급수의 수렴, 발산을 판단하고 수렴하면 합을 구하여라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5+2n+n^2}$$

답: 발산

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$\text{답: } \frac{\pi}{4-\pi}$$

4. (예제 8처럼) 부분합을 계산하여 급수의 수렴, 발산을 조사하여라. 수렴하면 합을 구하여라.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1}$$

답: 3

5. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ 가 수렴하기 위한 x 값을 구하고 급수의 합을 구하여라.

$$\text{답: } 1 < x < 5, \frac{2}{5-x}$$

10.3

1. 적분판정법을 사용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ 가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하여라.

답: 발산

2. 다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지를 판정하여라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

답: 수렴

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

답: 발산

3. 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 이 수렴하기 위한 p 값을 구하여라.

답: $p > 1$

10.4

1. 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + \sqrt{n}}{n^2}$

답: 발산

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2+5^n}$

답: 수렴

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2 n}{1+n^3}$

답: 수렴

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

답: 수렴

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

답: 발산

10.5

1. 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{4}{7} - \frac{4}{9} + \frac{4}{11} - \dots$

답: 수렴

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

답: 수렴

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n+2}$

답: 발산

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^3+2}$$

답: 수렴

10.6

1. 급수가 절대수렴하는지 조건부 수렴하는지 판정하여라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$$

답: 조건부 수렴

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

답: 절대수렴

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$$

답: 절대수렴

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(3n+1)!}$$

답: 절대수렴

2. 급수의 수렴 여부를 판정하여라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5^n}{4^n n^3}$$

답: 발산

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$$

답: 수렴(절대수렴)

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

답: 수렴

10.8

1. 급수의 수렴반지름과 수렴구간을 구하여라.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{\sqrt{n}} x^n$$

$$\text{답: } \frac{1}{3}, \quad \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} x^n$$

답: 4, $(-4, 4]$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$$

답: ∞ , $(-\infty, \infty)$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)} (x-3)^n$$

답: 2, $(1, 5]$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!x^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

답: 2, $(-2, 2)$

10.9

1. 다음 함수의 멱급수 표현을 찾고 수렴구간을 구하여라.

$$(1) f(x) = \frac{4}{1-5x^2}$$

답: $4 \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^{2n}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$(2) f(x) = \frac{2}{3x+4}$$

답: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n+1}} x^n$, $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$(3) f(x) = \frac{x^2}{x^4+9}$$

답: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{3^{2(n+1)}}$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$$(4) f(x) = \frac{3}{2-x}$$

답: $3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$, $(-2, 2)$

2. 다음 함수를 멱급수로 나타내고 수렴반지름을 구하여라.

$$(1) f(x) = \ln(5+x)$$

답: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{5}\right)^{n+1} + \ln 5, \quad 5$

(2) $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^3$

답: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+4}} x^{n+3}, \quad 2$

3. 부정적분을 급수로 계산하여라. 수렴반지름은 무엇인가?

$$\int \frac{1}{1+x^3} dx$$

답: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2} + C, \quad 1$

4. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 일 때, f 와 f' 의 수렴구간을 구하여라.

답: $[-1, 1], [-1, 1)$

10.10

1. 주어진 a 값을 중심으로 하는 $f(x)$ 의 멱급수 표현을 테일러 급수의 정의를 이용하여, 0이 아닌 첫 네 항을 구하시오.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 1$$

답: $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 + \dots$

2. 매클로린 급수의 정의를 사용하여 $f(x) = 3^x$ 의 매클로린 급수를 구하여라. 그리고 수렴반지름을 구하여라.

답: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!} x^n, \quad R = \infty$

3. $a = 2$ 에서 $f(x) = \frac{1}{x}$ 의 테일러 급수를 구하여라. 그리고 수렴반지름을 구하여라.

답: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}, \quad R = 2$

4. 이항급수를 사용하여 다음 함수를 멱급수로 전개하여라. 수렴반지름도 구하여라.

(1) $\frac{1}{(1+x)^2}$

답: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad R = 1$

(2) $\sqrt{1+x}$

답: $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n, \quad R=1$

5. $\int e^{x^2} dx$ 를 무한급수로 계산하여라.

답: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$

6. 급수를 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 를 구하여라.

답: $\frac{1}{6}$

7. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ 의 매클로린 급수에서 처음 3항을 멱급수의 나눗셈을 이용하여 구하여라.

답: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$

8. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n} (2n)!}$ 의 합을 구하여라.

답: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$)와 멱급수의 미분 또는 적분을 이용하여, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 의

합을 구하여라.

답: $2 + \ln 3$

10. 멱급수를 이용하여 부정적분 $\int \tan^{-1}(x^2) dx$ 을 구하여라.

답: $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+3)} x^{4n+3}$

11.2

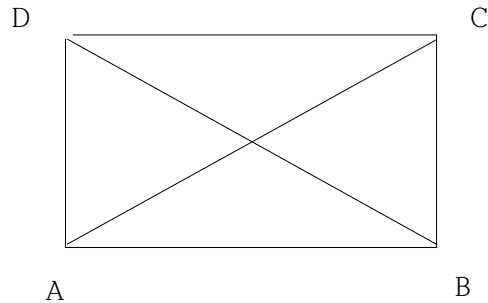
1. 아래의 벡터를 하나의 벡터로 표현하여라.

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

(3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

(4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$



답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

2. $A(1,2)$, $B(-2,1)$ 일 때, 유향선분 $\overrightarrow{AB}$ 에 의해 주어지는 표현을 갖는 벡터 $\mathbf{a}$ 를 구하여라.
 $\overrightarrow{AB}$ 와 동치인 위치벡터를 그려라.

답: $\langle -3, -1 \rangle$, 위치벡터 그림은 학생들에게 맡깁니다.

3. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 를 구하여라.

(1) $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} - \mathbf{j}$

답: $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $6\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$, 5, 13

(2) $\mathbf{a} = \langle 4, -3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -4 \rangle$

답: $\langle 6, -3, -2 \rangle$, $\langle 20, -12, 0 \rangle$, $\sqrt{29}$, 7

4. 주어진 벡터와 방향이 같은 단위벡터를 구하여라.

(1) $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

답: $\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$

(2) $\langle 5, -3, 1 \rangle$

답: $\left\langle \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}} \right\rangle$

5. 벡터 $-6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 와 같은 방향을 가지고, 길이가 3인 벡터를 구하여라.

답: $-\frac{18}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{9}{7}\mathbf{k}$

11.3

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 를 구하여라.

(1) $\mathbf{a} = \left\langle 1, \frac{1}{2} \right\rangle$, $\mathbf{b} = \left\langle \frac{1}{2}, -1 \right\rangle$

답: 0

(2) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

답: 14

(3) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 8$, $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 의 사이의 각은 $\frac{3}{4}\pi$

답: $-20\sqrt{2}$

2. 주어진 벡터 사이의 각을 구하여라.

(1) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

답: $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(2) $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -3, 1 \rangle$

답: $\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right)$

3. 세 점 $P(1, -1)$, $Q(-1, 2)$, $R(2, 3)$ 으로 이루어진 삼각형 세 각의 크기를 구하여라.

답: $\angle P = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{221}}\right)$, $\angle Q = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{130}}\right)$, $\angle R = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{170}}\right)$,

4. $\langle 1, 0, 1 \rangle$ 과 $\langle 1, 1, 0 \rangle$ 에 수직인 단위벡터를 구하여라.

답: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

5. $\mathbf{a}$ 위로의 $\mathbf{b}$ 의 스칼라 사영 및 벡터 사영을 구하여라.

$\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0, -1 \rangle$

답: $\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\left\langle \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right\rangle$

11.4

1. 벡터곱 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 를 구하고 이 벡터가 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 에 수직이 됨을 보여라.

(1) $\mathbf{a} = \langle 0, 2, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 3, 1 \rangle$

답: $\langle 14, 4, 2 \rangle$, 수직되는 이유는 직접확인 요망!

(2) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

답: $15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, 수직되는 이유는 직접확인 요망!

2. 벡터곱을 이용하여 $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ 와 $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 에 모두 직교하는 두 단위벡터를 구하여라.

답: $\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $-\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$

3. 꼭짓점이 $A(2, 1, 3)$, $B(4, 4, 4)$, $C(8, 6, 9)$, $D(6, 3, 8)$ 인 평행사변형의 넓이를 구하여라.

답: $\sqrt{269}$

4. 세 점 $A(2,3,1)$, $B(4,6,1)$, $C(-1,2,1)$ 을 지나는 평면과 직교하는 벡터를 구하고, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.

답: $\langle 0,0,7 \rangle$ 또는 $\langle 0,0,7 \rangle$ 와 상수배로 표현되는 벡터, $\frac{7}{2}$

5. 세 벡터 $\mathbf{a} = \langle 1,1,0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0,1,1 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 1,1,1 \rangle$ 에 의해 만들어지는 평행육면체의 부피를 구하여라.

답: 1

6. 이웃하는 세 변이 AB , AC , AD 인 평행육면체의 부피를 구하여라.

$$A(4,1,2), B(0,3,6), C(6,2,0), D(1,5,3)$$

답: 16

11.5

1. 점 $(-2,3,1)$ 과 점 $(4,5,-2)$ 을 지나는 직선의 매개방정식과 대칭방정식을 구하여라.

답: 매개 $x = -2 + 6t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1 - 3t$, 대칭 $\frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-3}$

2. 점 $A(3,2,1)$ 을 지나고 직선 $\frac{x}{7} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}$ 에 평행한 직선의 대칭방정식을 구하여라.

답: $\frac{x-3}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$

3. 점 $(11,19,5)$ 와 점 $(6,4,15)$ 을 지나는 직선은 점 $(-3,-5,2)$ 와 점 $(-1,1,-2)$ 을 지나는 직선과 평행인가?

답: 평행

4. (a) 점 $(-3,2,-3)$ 을 지나고 평면 $4x - 3y + 7z = 1$ 과 수직인 직선의 매개방정식과 대칭 방정식을 구하여라.

답: $x = -3 + 4t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 + 7t$; $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{7}$

(b) 이 직선이 좌표평면과 만나는 점을 구하여라.

답: $\left(-\frac{9}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$

5. 직선 L_1 과 L_2 가 평행인지, 꼬였는지, 만나는지 결정하여라.

$$L_1 : x = 2t + 2, y = -2t + 3, z = 7t$$

$$L_2 : x = s, y = -s + 1, z = 3s + 2$$

답: 꼬인위치

6. 평면의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-3, 0, 7)$ 을 지나고 벡터 $\langle 5, 2, -1 \rangle$ 에 수직인 평면

답: $5x + 2y - z = -22$

(2) 점 $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(4, 3, 0)$ 을 지나는 평면

답: $3x - 2y + 6z = 6$

7. (a) 주어진 평면이 평행한지, 수직인지 결정하여라. 어느 것도 아닌 경우 두 평면이 이루는 각을 구하여라.

$$3x - 6y - 2z = 15, \quad 2x + y - 2z = 5$$

답: $\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$

(b) 위 두 평면의 교선의 방정식을 구하여라.

답: $\frac{x-3}{14} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{15}$

8. 두 평면 $x + 3y - z = 2$ 와 $z = x + 3y - 4$ 사이의 거리를 구하여라.

답: $\frac{2}{\sqrt{11}}$

12.1

1. 벡터함수의 정의역을 구하여라.

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln t, e^t \sin t, \frac{1}{t-2} \right\rangle$$

답: $(0, 2) \cup (2, \infty)$

2. 극한값을 구하여라.

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} \mathbf{i} + \cos 4t \mathbf{j} + e^{5t} \mathbf{k} \right)$$

답: $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$(2) \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1 - e^{-2t}}{t}, \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \tan^{-1} t \right\rangle$$

답: $\left\langle 0, 1, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

3. 다음 벡터방정식의 그래프를 그려라. 또 t 가 증가하는 방향을 화살표로 나타내어라.

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 1 \rangle$$

답: 학생들에게 맡깁니다.

4. 점 $A(1, 2, 3)$ 와 점 $B(4, 5, 6)$ 를 잇는 선분의 매개변수방정식과 벡터방정식을 구하여라.

답: $x = 1 + 3t, y = 2 + 3t, z = 3 + 3t \quad (0 \leq t \leq 1)$

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1+3t, 2+3t, 3+3t \rangle \quad (0 \leq t \leq 1)$$

5. 곡면 $x^2 + y^2 = 1$ 과 곡면 $z + 2y^2 = 1$ 의 교선의 벡터방정식을 구하여라.

답: $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \cos 2t \rangle$

12.2

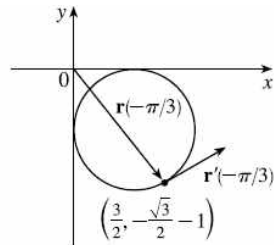
1. 벡터함수 $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + \cos t, \sin t - 1 \rangle$ 에 대하여,

(1) $\mathbf{r}'(t)$ 와 $\mathbf{r}'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 를 구하여라.

답: $\langle -\sin t, \cos t \rangle, \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

(2) 벡터함수로 주어진 평면곡선을 그리고 위치벡터 $\mathbf{r}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 와 접선벡터 $\mathbf{r}'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 를 그려라

답:



2. 벡터함수의 도함수를 구하여라.

(1) $\mathbf{r}(t) = (t - t^3)\mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$

답: $\mathbf{r}'(t) = (1 - 3t^2)\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

(2) $\mathbf{r}(t) = \langle \sin^2 t, te^{2t}, \cos^2 t \rangle$

답: $\langle \sin 2t, e^{2t}(2t+1), -\sin 2t \rangle$

3. 벡터함수 $\mathbf{r}(t) = \langle 2e^{2t}, 8te^t, \tan^{-1} t \rangle$ 에 대하여 단위접선벡터 $\mathbf{T}(0)$ 를 구하여라.

답: $\left\langle \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{9} \right\rangle$

4. 주어진 점에서 매개변수방정식으로 표시된 곡선에 대한 접선의 대칭방정식을 구하여라.

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t, t, t^2 \rangle, \quad t = 1$$

답: $\frac{x-e}{e} = y-1 = \frac{z-1}{2}$

5. 곡선 $x = t \cos t, y = t, z = t \sin t$ 위의 점 $(-\pi, \pi, 0)$ 에서 접선의 대칭방정식을 구하여라.

답: $\frac{x+\pi}{-1} = \frac{y-\pi}{1} = \frac{z}{-\pi}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (t \cos 2t \mathbf{i} + \sin^2 2t \cos 2t \mathbf{j} + \sec t \tan t \mathbf{k}) dt$ 을 구하여라.

답: $\left\langle \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \sqrt{2} - 1 \right\rangle$

7. $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$ 이고 $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 1, 1 \rangle$ 일 때, $\mathbf{r}(t)$ 를 구하여라.

답: $\langle \cos t, \sin t + 1, t + 1 \rangle$

12.3

1. 주어진 곡선의 길이를 구하여라.

(1) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle, \quad 1 \leq t \leq 5$

답: $4\sqrt{2}$

(2) $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^t, \sqrt{2}t \rangle, \quad 0 \leq t \leq 3$

답: $e^3 - e^{-3}$

(3) $\mathbf{r}(t) = 2e^t \cos t \mathbf{i} + 2e^t \sin t \mathbf{j} + 4e^t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

답: $2\sqrt{6}(e - 1)$

13.1

1. $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ 일 때,

(1) $f(2, -1)$ 의 값을 구하여라.

답: 0

(2) f 의 정의역을 찾아라.

답: $\mathbb{R}^2$

(3) f 의 치역을 찾아라.

답: $[-1, 1]$

2. 함수 $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y+1}}{x-2}$ 의 정의역을 구하고 $f(3, 2)$ 를 계산하여라.

답: $D = \{(x, y) | x \neq 2, x - y + 1 \geq 0\}, \sqrt{2}$

3. 함수 $g(x, y) = y \ln(x^2 - y)$ 의 정의역을 구하고 $g(3, 2)$ 를 계산하여라.

답: $D = \{(x, y) | x^2 > y\}, 2 \ln 7$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ 의 그래프를 그려라.

답: 직접적인 해답이 되므로 줄 수 없습니다.

13.2

1. 극한이 존재하면 극한값을 구하여라. 또는 극한이 존재하지 않는 이유를 보여라.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2}$$

답: 0

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} y \cos \pi(x-y)$$

답: -1

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

답: 존재하지 않는다. 이유를 상세히 기술하시기 바랍니다.

2. 함수 $f(x,y,z) = \sqrt{y-x^2} \ln z$ 가 연속인 점들의 집합을 결정하여라.

답: $\{(x,y,z) | y \geq x^2, z > 0\}$

13.3

1. 다음 함수의 1계 편도함수를 구하여라.

$$(1) f(x,y) = x^4 + 3xy^5$$

답: $f_x(x,y) = 4x^3 + 3y^5, f_y(x,y) = 15xy^4$

$$(2) f(x,y) = \sqrt{3x+4y}$$

답: $f_x(x,y) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4y}}, f_y(x,y) = \frac{2}{\sqrt{3x+4y}}$

$$(3) f(x,y) = \tan^{-1}(xy^2)$$

답: $f_x(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2y^4}, f_y(x,y) = \frac{2xy}{1+x^2y^4}$

$$(4) f(x,y) = \int_x^y \sqrt{t^3+1} dt$$

답: $f_x(x,y) = -\sqrt{x^3+1}, f_y(x,y) = \sqrt{y^3+1}$

$$(5) f(x,y,z) = xy^2 e^{-xz}$$

답: $f_x = (1-xz)y^2 e^{-xz}, f_y = 2xy e^{-xz}, f_z = -x^2 y^2 e^{-xz}$

$$(6) f(x,y,z) = \sqrt{x^4+y^2} \cos z$$

답: $f_x = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + y^2 \cos z}}$, $f_y = \frac{y \cos z}{\sqrt{x^4 + y^2 \cos z}}$, $f_z = -\frac{y^2 \sin z}{2\sqrt{x^4 + y^2 \cos z}}$

2. $f(x, y) = y \sin^{-1}(xy)$ 일 때, $f_y\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 를 구하여라.

답: $1 + \frac{\pi}{4}$

3. 음함수의 미분을 이용하여 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 와 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 을 구하여라.

$$z^2 - yz - x \ln y = 5$$

답: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\ln y}{2z - y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + yz}{y(2z - y)}$

4. $z = \sin(x^2 - y^2)$ 일 때, z_{xx} , z_{xy} , z_{yx} , z_{yy} 을 구하여라.

답: $z_{xx} = 2\cos(x^2 - y^2) - 4x^2 \sin(x^2 - y^2)$, $z_{xy} = 4xy \sin(x^2 - y^2)$, $z_{yx} = 4xy \sin(x^2 - y^2)$, $z_{yy} = -2\cos(x^2 - y^2) - 4y^2 \sin(x^2 - y^2)$

5. $w = \ln(x + y^2 + z^3)$ 일 때, $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ 을 구하여라.

답: $\frac{12yz^2}{(x + y^2 + z^3)^3}$

6. $w = \frac{x}{y + 2z}$ 일 때, $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ 을 구하여라.

답: 0

7. $w = x^a y^b z^c$ 일 때, $\frac{\partial^6 w}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$ 을 구하여라.

답: $abc(b-1)(c-1)(c-2)x^{a-1}y^{b-2}z^{c-3}$

13.4

1. 주어진 점에서 곡면에 대한 접평면의 방정식을 구하여라.

(1) $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$

답: $z = 3x + 7y - 5$

(2) $z = 1 + x \ln(xy - 5)$, $(2, 3, 1)$

답: $z = 6x + 4y - 23$

(3) $z = 4 \tan^{-1}(xy)$, $(1, 1, \pi)$

답: $2x + 2y - z = 4 - \pi$

(4) $z = \frac{y-1}{x+1}, \quad (0,0,-1)$

답: $x+y-z=1$

13.5

1. $w = x^2y^3 + z^4, \quad x = t + 3t^2, \quad y = te^t, \quad z = t$ 일 때, $\frac{dw}{dt}$ 를 구하여라.

답: $2xy^3(1+6t) + 3x^2y^2(te^t + e^t) + 4z^3$

2. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = \tan t$ 일 때, $\frac{dw}{dt}$ 를 구하여라.

답: $\frac{x \cos t - y \sin t + z \sec^2 t}{x^2 + y^2 + z^2}$

3. $z = \ln(3x+2y), \quad x = s \sin t, \quad y = t \cos s$ 일 때, $\frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$ 을 구하여라.

답: $\frac{3 \sin t - 2t \sin s}{3x+2y}, \quad \frac{3s \cos t + 2 \cos s}{3x+2y}$

4. $z = \tan\left(\frac{x}{y}\right), \quad x = 2s+3t, \quad y = 3s-2t$ 일 때, $\frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$ 을 구하여라.

답: $\frac{2y-3x}{y^2} \sec^2\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{2x+3y}{y^2} \sec^2\left(\frac{x}{y}\right)$

5. $z = x^2 \sin y + ye^{xy}, \quad x = s+2t, \quad y = st$ 에 대하여 $s=0, t=1$ 일 때, $\frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$ 을 구하여라.

답: 5, 0

6. $z = f(x,y), \quad x = g(s,t), \quad y = h(s,t), \quad g(1,2)=3, \quad g_s(1,2)=-1, \quad g_t(1,2)=4, \quad h(1,2)=6,$

$h_s(1,2)=-5, \quad h_t(1,2)=10, \quad f_x(3,6)=7, \quad f_y(3,6)=8$ 일 때, $s=1, t=2$ 에서 $\frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$ 을 구

하여라.

답: -47, 108

7. f 가 미분가능하고 $z = y + f(x^2 - y^2)$ 이고 $g(x,y) = y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$ 일 때, $g(1,2)$ 의 값을 구하여라.

답: 1

8. $\cos(xyz) = x^2y^2 + z^2 + 1$ 일 때, $\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$ 를 구하여라.

답: $-\frac{2xy^2 + yz \sin(xyz)}{2z + xy \sin(xyz)}, -\frac{2x^2y + xz \sin(xyz)}{2z + xy \sin(xyz)}$

9. 매개변수방정식 $x = \sin t, y = \cos 2t$ 로 표현되는 곡선 C 를 따라 점 (x, y) 가 움직이고 $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^2$ 이 점 (x, y) 에서의 온도를 나타낼 때, 점 $(0, 1)$ 에서의 온도의 변화율을 구하여라.

답: 3

13.6

1. $f(x, y) = y \cos(xy)$ 이고 단위벡터 $\mathbf{u}$ 와 양의 x 축과 이루는 각 θ 가 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 방향도함수 $D_{\mathbf{u}}f(0, 1)$ 의 값을 구하여라.

답: $\frac{1}{2}$

2. $f(x, y) = x^2 + xy$ 이고 $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ 일 때, $\nabla f(1, 2)$ 와 $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ 를 구하여라.

답: $\langle 4, 1 \rangle, \frac{5\sqrt{2}}{2}$

3. $f(x, y, z) = y^2 e^{xyz}$ 이고 $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$ 일 때, $\nabla f(0, 1, -1)$ 와 $D_{\mathbf{u}}f(0, 1, -1)$ 를 구하여라.

답: $\langle -1, 2, 0 \rangle, \frac{5}{13}$

4. 벡터 $\mathbf{v}$ 의 방향으로 주어진 점에서 함수의 방향도함수를 구하여라.

(1) $f(x, y) = x^2 e^{-y}, (-2, 0), \mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

답: $-\frac{4}{5}$

(2) $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}, (1, 2, 3), \mathbf{v} = \langle 2, 1, -2 \rangle$

답: $\frac{25}{6}$

5. $f(x, y, z) = xy^2z^3$ 일 때, 점 $P(2, 1, 1)$ 에서 점 $Q(0, -3, 5)$ 방향으로 점 $P(2, 1, 1)$ 에서 f 의 변화율을 구하여라.

답: 1

6. 주어진 점에서 f 의 최대 변화율과 그것이 생기는 방향을 구하여라.

(1) $f(x, y) = ye^{xy}, (0, 2)$

답: $\langle 4, 1 \rangle, \sqrt{17}$

(2) $f(x, y, z) = \tan^{-1}(xyz)$, $(1, 2, 1)$

답: $\left\langle \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle, \frac{3}{5}$

7. 곡면 $xy + yz + zx = 5$ 에 대하여 점 $(1, 2, 1)$ 에서 접평면과 법선의 방정식을 구하여라.

답: $3x + 2y + 3z = 10, \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$

8. 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 에 대한 접평면이 평면 $x + y + z = 1$ 과 평행하게 되는 구면위의 점 (x, y, z) 을 모두 구하여라.

답: $(-1, -1, -1), (1, 1, 1)$

13.7

1. 주어진 함수의 극댓값, 극솟값, 안장점을 구하여라.

(1) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

답: 극소 $f(-4, 1) = -11$

(2) $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

답: 극소 $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = -1$, 안장점 $(0, 0)$

(3) $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

답: 극대 $f(1, 1) = 1$, 안장점 $(0, 0), (3, 0), (0, 3)$

(4) $f(x, y) = (x^2 + y)e^{\frac{y}{2}}$

답: 극소 $f(0, -2) = -\frac{2}{e}$

2. 집합 D 상에서 f 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$, D 는 $(0, 0), (6, 0), (0, 6)$ 으로 둘러싸인 삼각형 모양의 영역이다.

답: 최대 $f(1, 2) = 4$, 최소 $f(2, 4) = -64$

(2) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

답: 최대 $f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}$, 최소 $f(0, 0) = 0$

13.8

1. 라그랑주 승수를 이용하여 주어진 식을 제약조건을 할 때 함수의 최대, 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + y^2 = 1$

답: 최대 $f\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, 최소 $f\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(2) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

답: 최대 $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$, 최소 $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

(3) $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

답: 최대 $f(1, 1, 1) = f(1, -1, -1) = f(-1, 1, -1) = f(-1, -1, 1) = 1$,

최소 $f(-1, 1, 1) = f(1, -1, 1) = f(1, 1, -1) = f(-1, -1, -1) = -1$

2. 합이 12이고 제품의 합이 최소가 되는 세 양수 x, y, z 를 구하여라.

답: 4, 4, 4

14.1

1. $R = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ 일 때, 입체의 부피로 간주하여 이중적분

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA$$

의 값을 구하여라.

답: 2π

2. 다음의 반복적분을 계산하여라.

(1) $\int_0^3 \int_1^2 (1+2x+4xy) dy dx$

답: 39

(2) $\int_{-3}^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y + y^2 \cos x) dx dy$

답: 18

(3) $\int_0^1 \int_0^1 (xy \sqrt{x^2 + y^2}) dy dx$

답: $\frac{2}{15}(2\sqrt{2}-1)$

(4) $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x+y} dx dy$

답: $\frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1)$

3. 다음의 이중적분을 계산하여라.

$$(1) \iint_R \frac{x}{1+xy} dA, \quad R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\text{답: } 2\ln 2 - 1$$

$$(2) \iint_R y e^{-xy} dA, \quad R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$$

$$\text{답: } \frac{1}{2e^6} + \frac{5}{2}$$

$$(3) \iint_R \frac{\tan x}{\sqrt{1-y^2}} dA, \quad R = \left\{ (x, y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{답: } \frac{\pi}{6} \ln 2$$

4. 평면 $z = 8 - 2x - y$ 아래에 놓이고 직사각형 $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ 위에 놓인 입체의 부피를 구하여라.

$$\text{답: } 12$$

14.2

1. 다음 반복적분을 계산하여라.

$$(1) \int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + 2xy) dy dx$$

$$\text{답: } \frac{2}{15}$$

$$(2) \int_0^\pi \int_0^{\sin y} (x + \cos y) dx dy$$

$$\text{답: } \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \int_0^1 \int_0^{e^y} \sqrt{1+e^y} dx dy$$

$$\text{답: } \frac{2}{3}(1+e)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

2. 다음 이중적분을 계산하여라.

$$(1) \iint_D x e^{y^3} dA, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

$$\text{답: } \frac{e-1}{6}$$

$$(2) \iint_D \cos(x^3) dA, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

답: $\frac{\sin 1}{3}$

3. 다음 이중적분을 계산하여라.

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) dA$, D 는 좌표평면에서 $x + y = 1$ 과 x 축 및 y 축에 의해 둘러싸인 영역

답: $\frac{1}{6}$

(2) $\iint_D (x^2 + y^2) dA$, D 는 좌표평면에서 $y = x - 1$ 과 $y^2 = x + 1$ 에 의해 둘러싸인 영역

답: $\frac{117}{14}$

(3) $\iint_D (x^2 + 2y) dA$, D 는 좌표평면에서 $y = x$ 과 $y = x^3$ 에 의해 둘러싸인 제1 사분면 영역

답: $\frac{23}{84}$

4. 곡면 $z = x^2$ 아래에 놓이고 $y = 4$, $y = x^2$ 에 의해 유계된 영역 위에 놓인 입체의 부피를 구하여라.

답: $\frac{128}{15}$

5. 다음 적분을 계산하여라.

(1) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$

답: $\frac{e-1}{2}$

(2) $\int_0^1 \int_{\sin^{-1}y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$

답: $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

(3) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \cos(x^3) dx dy$ 을 구하여라.

답: $\frac{\sin 1}{3}$

14.3

1. 다음 적분을 계산하여라.

(1) $\iint_D (3x + 8y^2) dA$, $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

답: 15π

(2) $\iint_D (x + y) dA$, D 는 두 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 $x^2 + y^2 = 4$ 로 둘러싸인 영역 중 제1사분면에 놓여있는 영역

답: $\frac{14}{3}$

(3) $\iint_D e^{-(x^2 + y^2)} dA$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ (단, $a > 0$)

답: $\pi(1 - e^{-a^2})$

(4) $\iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dA$, $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

답: $\frac{3\pi^2}{64}$

2. 이중적분을 사용하여 $r = 2\cos\theta$ 의 내부와 $r = 1$ 의 외부에 놓여 있는 도형의 넓이를 구하라.

답: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 다음 입체의 부피를 계산하라.

(1) 평면 $z = 0$ 의 위, 원기둥 $x^2 + y^2 = 2y$ 의 내부, 포물면 $z = x^2 + y^2$ 의 아래에 놓여 있는 입체

답: $\frac{3}{2}\pi$

(2) 평면 $z = 7$ 와 포물면 $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ 에 의해 유계된 입체

답: 9π

4. 반복적분 $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$ 를 계산하라.

답: $\frac{16}{9}$

14.6

1. 다음 반복적분을 계산하라.

(1) $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} x e^{-y} dy dx dz$

답: $\frac{5}{3}$

(2) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1} dx dz dy$

답: $\frac{\ln 2}{3}$

(3) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{1-y^2-z^2} y^2 z^2 dx dz dy$

답: $\frac{\pi}{96}$

2. 다음 삼중적분을 계산하여라.

(1) $\iiint_E \sin y dV$, 단, $E = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x, 0 \leq z \leq x\}$

답: $\frac{\pi^2}{2} - 2$

(2) $\iiint_E z dV$, 단, E 는 원점, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 을 꼭지점으로 갖는 사면체

답: $\frac{1}{24}$

3. 제1팔분공간에서 $z = 1 - y^2$, $y = 2x$, $x = 3$ 으로 둘러싸인 입체의 부피를 삼중적분을 이용하여 계산하여라.

답: $\frac{15}{8}$

4. 삼중적분을 이용하여, 세 좌표평면과 평면 $x + 2y + z = 2$ 에 의해 둘러싸인 사면체의 부피를 구하여라.

답: $\frac{2}{3}$

14.7

1. 다음 물음에 답하여라.

(1) 원기둥 좌표가 $(4, \frac{\pi}{3}, 8)$ 인 점의 직교좌표를 구하여라.

답: $(2, 2\sqrt{3}, 8)$

(2) 직교좌표가 $(1, \sqrt{3}, -2)$ 의 원기둥 좌표를 구하여라.

답: $\left(2, \frac{\pi}{3}, -2\right)$

2. 직교좌표로 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 인 타원면의 원기둥 좌표 방정식을 구하여라.

답: $z^2 = 1 - 2r^2$

3. E 가 제1팔분공간에서 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 으로 둘러싸인 입체일 때, $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$ 를 계산하여라.

답: $\frac{\pi}{24}$

14.8

1. 구면 좌표 $\left(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 를 직교좌표와 원기둥 좌표로 바꾸어라.

답: $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}, 3\right), \left(3\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, 3\right)$

2. 다음 물음에 답하여라.

(1) 직교방정식 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 의 구면좌표 방정식을 구하여라.

답: $\rho^2 \cos 2\phi + 1 = 0$

(2) 구면좌표 방정식 $\rho = \sin \phi \cos \theta$ 를 직교방정식으로 나타내어라.

답: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$

3. E 가 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 둘러싸인 입체일 때, $\iiint_E (x^2 + y^2) dV$ 를 계산하여라.

답: $\frac{248}{15}\pi$

4. 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 위와 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 아래에 놓인 입체 E 의 부피를 구하여라.

답: $\frac{2 - \sqrt{2}}{3}\pi$