

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과/학부							
담당교수	공동 출제		학년		학번						
			성명								

2025학년도 1학기 미적분학1 중간고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 다음 부정적분을 구하여라. (5점)

$$\int (3x^2 + 6e^{3x} + \sec x(\sec x + \tan x) + \cot x) dx$$

<풀이>

$$\int (3x^2 + 6e^{3x} + \sec x(\sec x + \tan x) + \cot x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 6e^{3x} + \sec^2 x + \sec x \tan x + \frac{\cos x}{\sin x}) dx$$

$$= x^3 + 2e^{3x} + \tan x + \sec x + \ln|\sin x| + C$$

2. 식 $\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \cot(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$ 의 값을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \text{라고 하면, } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq x \leq \pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{이고,}$$

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y \text{라고 하면, } \tan y = -\sqrt{3}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$y = -\frac{\pi}{3} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \cot(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

3. 곡선 $y = \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x^4+1}}$ 에 대하여 $x=1$ 인 점에서의 접선의 방정식을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$x=1 \text{일 때, } y=2 \text{ 이고,}$$

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x^4+1}} \text{에 대하여, } \ln y = \frac{1}{2} [3\ln(x+1) - \ln(x^4+1)] \text{ 이므로,}$$

$$y' = \frac{y}{2} \left[\frac{3}{x+1} - \frac{4x^3}{x^4+1} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x^4+1}} \left[\frac{3}{x+1} - \frac{4x^3}{x^4+1} \right] \text{이고,}$$

$$y'(1) = -\frac{1}{2} \text{이다.}$$

따라서 $x=1$ 인 점에서의 접선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}(x-1)+2$ 이다.

4. 함수 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라. (5점)

<풀이> $f(x)$ 의 정의역: $-2 \leq x \leq 2$ 이므로

$$f(-2) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(2) = \frac{\pi}{2} \text{이다.}$$

$$f'(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{4-x^2}} \text{이므로 } -2 < x < 2 \text{에서의 임계수는 } x=1 \text{이}$$

$$\text{고, } f(1) = \sqrt{3} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \text{이다.}$$

그런데, $x < 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 $x > 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로

$$f(x) \text{의 최댓값은 } f(1) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \text{이고 최솟값은 } f(-2) = -\frac{\pi}{2}$$

이다.

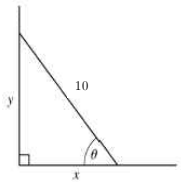
5. 함수 $f(x) = \int_0^{2x} \left(\cos \frac{\pi t^2}{2} + 1 \right) dt$ 일 때, $a=0$ 에서 $f(x)$ 의 선형화(일차근사식)을 구하고, 이것을 이용하여 $\int_0^{0.02} \left(\cos \frac{\pi t^2}{2} + 1 \right) dt$ 의 근삿값을 구하여라. (5점)

<풀이>

$f(0) = 0$, $f'(x) = 2(\cos 2\pi x^2 + 1)$, $f'(0) = 4$ 이므로 $L(x) = f(0) + f'(0)x = 4x$ 이다.

$\int_0^{0.02} \left(\cos \frac{\pi t^2}{2} + 1 \right) dt = f(0.01) \approx L(0.01) = 0.04$ 이다.

6. 길이가 10m인 사다리가 수직인 벽면에 기대어 있다. 사다리의 위쪽 끝은 벽을 따라 $\frac{1}{2}$ m/s의 속도로 미끄러져 내려가고 있다. 사다리의 위쪽 끝이 지면에서 6m높이에 있을 때, 사다리와 지면이 이루는 각의 변화율은 얼마인가? (5점)



<풀이>

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \text{ 이고 } \sin \theta = \frac{y}{10}$$

양변을 t 로 미분하면, $\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt}$ 이다.

$$\text{따라서 } \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{20} \text{ 이고}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{20 \cos \theta} \text{ 이다.}$$

$$y = 6 \text{ 이면, } x = 8 \text{ 이고 } \cos \theta = \frac{4}{5} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{y=6} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{1}{16} \text{ 이다.}$$

7. 함수 $f(x) = \frac{x^2+1}{e^{x^2}}$ 가 감소하면서 곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 오목(위로 볼록)한 구간을 구하여라. (5점)

<풀이>

$f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x(x^2+1)e^{-x^2} = -2x^3e^{-x^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$ 일 때, 함수 f 는 감소한다.

$$f''(x) = -6x^2e^{-x^2} + 4x^4e^{-x^2} = 4x^2 \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) e^{-x^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$ 은 아래로 오목하다.

따라서 함수가 감소하면서 아래로 오목한 구간은 $0 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.

8. $x \neq 1$ 인 모든 실수에서 미분가능한 함수 f 가

$$\{f(x)\}^2 = f'(x), \quad f(0) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\int \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx = \int 1 dx \text{ 이므로,}$$

$$-\frac{1}{f(x)} = x + C \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x+C}$$

$$f(0) = 1 \text{ 을 대입하면, } 1 = f(0) = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$