

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과/학부							
담당교수	공동 출제		학년		학번						
			성명								

2025학년도 1학기 미적분학1 기말고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 극좌표 $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ 의 점을 직교좌표 (x, y) 로 나타내어라. (5점)

(풀이)

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad \text{이므로}$$

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{이다.}$$

2. 다음 적분값을 구하여라. (5점)

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

(풀이)

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x\right) + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

3. 두 곡선 $y = xe^x$, $y = e^x$ 와 두 직선 $x = 0, x = 2$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라. (5점)

(풀이)

$$0 \leq x \leq 1 \text{에서는 } e^x \geq xe^x \text{이고,}$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{에서는 } xe^x \geq e^x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \int_0^1 (e^x - xe^x) dx + \int_1^2 (xe^x - e^x) dx \\ &= - \int_0^1 (x-1)e^x dx + \int_1^2 (x-1)e^x dx \\ &= [(2-x)e^x]_0^1 + [(x-2)e^x]_1^2 = 2(e-1) \text{이다.} \end{aligned}$$

4. 다음 적분값을 구하여라. (5점)

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

(풀이)

부분적분법을 2번 사용하면,

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x]_1^e = e - 2 \text{이다.}$$

5. 곡선 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 에서 $x=0$ 과 $x=3$ 사이의 부분(호)을 y 축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 겉넓이를 구하여라. (5점)

(풀이)

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx \text{이므로, 회전체의 겉넓이는}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 2\pi x ds = 2\pi \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \\ &= 2\pi \int_1^2 2(u^4 - u^2) du \quad (u = \sqrt{x+1}, 2u du = dx) \\ &= 4\pi \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_1^2 = \frac{232}{15}\pi \end{aligned}$$

6. 이상적분 $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+x} dx$ 가 수렴하는지 또는 발산하는지를 조사하고 수렴하는 경우에는 그 값을 구하여라. (5점)

(풀이)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{x-1}{x^3+x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left(-\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x \right]_1^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\ln t + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \tan^{-1} t - \frac{1}{2} \ln 2 - \tan^{-1} 1 \right) \\ &\quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\ln t + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} = \ln 1 = 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

이므로 $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ 로 수렴한다.

7. 함수 $x=1$ 에서 $x=\sqrt{3}$ 까지 곡선 $y = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ 아래의 영역을 y 축으로 회전하여 생기는 입체의 부피를 구하여라. (5점)

(풀이)

원통셀의 방법으로 입체의 부피를 구하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{\sqrt{3}} 2\pi x \times \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

$$(x = \tan \theta \Rightarrow dx = \sec^2 \theta d\theta)$$

$$x=1 \text{ 일 때, } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 이고 } x=\sqrt{3} \text{ 일 때, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec \theta d\theta$$

$$= 2\pi \left[\ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\pi \left(\ln \left(\sec \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3} \right) + \ln \left(\sec \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 2\pi (\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}+1))$$

$$= 2\pi \ln \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \right)$$

8. 사이클로이드 $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$ ($0 < \theta < 2\pi$)의 이계

도함수 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 가 $y = \alpha$ 일 때 최댓값을 갖는다. $y = \alpha$ 일 때,

$\frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$ 의 값을 구하여라. (5점)

(풀이)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

이고

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{\cos \theta (1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}}{1 - \cos \theta} \\ &= -\frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} = -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

이다. $0 < \theta < 2\pi$ 에서 $0 < y \leq 2$ 이므로 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 는 $y=2$ 일 때,

최댓값을 갖는다. $\frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{2}{y^3}$ 이므로

$$\left. \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right|_{y=2} = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$